

# Stabilitätsanalyse von vernetzten Systemen mit Verzögerungen in der Datenübertragung

- Studienarbeit -



26.07.2006





ω  $\Sigma_1$ 













- $\tau_{31}$
- $\tau_{13}$
- $\tau_{23}$









 $f_R, f_L$ 











- $\tau_{13}$
- $\tau_{23}$ 
  - τ









 $f_R, f_L$ 

















- $\tau_{31}$
- $\tau_{13}$
- $\tau_{23}$

τ







<u>ist</u> ?	Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick	$ au_{21}$ $ au_{31}$
Probl	emstellung	τ <sub>13</sub>
	• Menge von dynamischen Systen $\Sigma_i$ : $\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i)$	$\begin{array}{c} \tau_{12} \\ \tau_{21} \\ \tau_{31} \\ \tau_{13} \\ \tau_{13} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ \tau_{23$
	$y_i = h_i(x_i)$ • Verknüpfung: $u_i(t) = g_i(y_{j_1}(t), \dots, y_{j_{m_i}}(t))$	t))

ict <sup>0</sup>	Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden	τ <sub>21</sub>
	Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick	τ <sub>31</sub>
Problemstell	ung	т <sub>13</sub> 773

Menge von dynamischen Systemen:

$$\Sigma_i: \quad \dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i(t))$$
$$y_i = h_i(x_i)$$



Verknüpfung:

 $u_i(t) = g_i(y_{j_1}(t - \tau_{i,j_1}), \dots, y_{j_{m_i}}(t - \tau_{i,j_{m_i}}))$ 

ict <sup>0</sup>	Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden	τ <sub>21</sub>
	Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick	τ <sub>31</sub>
Problemstell	ung	т <sub>13</sub> 773

Menge von dynamischen Systemen:

$$\Sigma_i: \quad \dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i(t))$$
$$y_i = h_i(x_i)$$



Verknüpfung:

$$u_i(t) = g_i(y_{j_1}(t - \tau_{i,j_1}), \ldots, y_{j_{m_i}}(t - \tau_{i,j_{m_i}}))$$

### ⇒ Totzeit-System

ict <sup>0</sup>	Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden	τ <sub>21</sub>
	Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick	τ <sub>31</sub>
Problemstell	ung	т <sub>13</sub> 773

Menge von dynamischen Systemen:

$$\Sigma_i: \quad \dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i(t))$$
$$y_i = h_i(x_i)$$



Verknüpfung:

$$u_i(t) = g_i(y_{j_1}(t - \tau_{i,j_1}), \dots, y_{j_{m_i}}(t - \tau_{i,j_{m_i}}))$$

### ⇒ Totzeit-System

Ist das vernetzte System mit Zeitverzögerungen stabil?



### Inhaltsverzeichnis



### Modell des Netzwerks



Verschiedene Analyse-Methoden



4 Zusammenfassung und Ausblick





Vereinfachungen Verknüpfungsstruktur Modell des Netzwerks

# Übersicht



2 Verschiedene Analyse-Methoden

- Frequency-Sweeping-Test
- 4 Zusammenfassung und Ausblick





Vereinfachungen Verknüpfungsstruktur Modell des Netzwerks

### Vereinfachungen



Institut für Systemtheorie und Regelungstechnik Stabilitätsanalyse von vernetzten Systemen



Vereinfachungen Verknüpfungsstruktur Modell des Netzwerks

 $\tau_{23}$ 

### Vereinfachungen

Zeitverzögerungen:

$$\tau_{i,j_k} = \tau = const.$$





Vereinfachungen Verknüpfungsstruktur Modell des Neizwerks

 $\tau_{23}$ 

## Vereinfachungen

Zeitverzögerungen:

$$z_{i,j_k} = \tau = const.$$

• Dynamik der Systeme:

1

$$\Sigma_1: \quad \dot{x}_i(t) = ax_i(t) + bu_i(t)$$

mit  $a, b, x, u \in \mathbb{R}$ 





Vereinfachungen Verknüpfungsstruktur Modell des Netzwerks

> $τ_{23}$  $τ_{12}$

 $\tau_{21}$ 

 $\tau_{31}$ 

## Vereinfachungen



$$\tau_{i,j_k} = \tau = const.$$

• Dynamik der Systeme:

1

$$\Sigma_1: \quad \dot{x}_i(t) = ax_i(t) + bu_i(t)$$

mit  $a, b, x, u \in \mathbb{R}$ 

### Welchen Einfluss hat die Verknüpfungsstruktur auf die Stabilität?



 $\Sigma_1$ 



Vereinfachungen Verknüpfungsstruktur Modell des Netzwerks

# Verknüpfungsstruktur





<u>ist</u>

Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick

Vereinfachungen Verknüpfungsstruktur Modell des Netzwerks

# Verknüpfungsstruktur



Abbildung der Verknüpfungsstruktur  $\rightarrow$  Verknüpfungsmatrix C

<u>ist</u>

Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick

Vereinfachungen Verknüpfungsstruktur Modell des Netzwerks

# Verknüpfungsstruktur



Abbildung der Verknüpfungsstruktur  $\rightarrow$  Verknüpfungsmatrix C

Gewichtsfaktoren:

$$c_{ij} \in \{-1, 1, 0\}$$

• Eingang:

$$u_i(t) = \sum_{j \neq i} c_{ij} x_j(t-\tau)$$



Vereinfachungen Verknüpfungsstruktur Modell des Netzwerks

### Modell des Netzwerks

Oynamik der Systeme:

$$\dot{x}_i(t) = ax_i(t) + bu_i(t)$$

Eingang:

$$u_i(t) = \sum_{j \neq i} c_{ij} x_j(t - \tau)$$

Gewichtsfaktoren:

 $c_{ij} \in \{-1,1,0\}$ 



Vereinfachungen Verknüpfungsstruktur Modell des Netzwerks

### Modell des Netzwerks

Oynamik der Systeme:

$$\dot{x}_i(t) = ax_i(t) + bu_i(t)$$

Eingang:

$$u_i(t) = \sum_{j \neq i} c_{ij} x_j(t - \tau)$$

Gewichtsfaktoren:

$$c_{ij} \in \{-1,1,0\}$$

Gesamt-System: 
$$\dot{x}(t) = a x(t) + b C x(t - \tau)$$

 $\text{mit Anfangsbedingung} \quad x(t_0+\theta)=\phi(\theta), \ -\tau\leq\theta\leq 0 \quad \text{und} \quad x\in\mathbb{R}^n, \ C\in\mathbb{R}^{n\times n}, \ a,b,\tau\in\mathbb{R} \\ \label{eq:alpha}$ 



# Übersicht





### Verschiedene Analyse-Methoden

- 3 Frequency-Sweeping-Test
- 4 Zusammenfassung und Ausblick



<u>ist</u>	Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick	$\overline{\tau}_0$ $\delta^*$	
Verschie	edene Analyse-Methoden	JR, JL W	
		$\Sigma_1$	
Frequ	ienzbereich	$\Sigma_2 \\ \Sigma_3$	
	klassische Stabilitätstests	$\tau_{12}$	
	Frequency-Sweeping-Test	$\tau_{21}$	
	Test über konstante Matrizen	$\tau_{31}$	
	Small-Gain-Ansätze	τ <sub>13</sub>	
		τ <sub>12</sub>	
Zeitb	ereich	$\tau_{21}$	
	Theorem von Ljapunow-Krasov	vskii <sup>τ</sup> <sup>31</sup>	
	Theorem von Razumikhin	τ <sub>13</sub>	
	Matrix-Norm	$\tau_{23}$	

isto	Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden Frequency-Sweeping-Test Zusammerfassung und Ausblick	$\overline{\tau}_0$ $\delta^*$	
Verschie	edene Analyse-Methode	en ω	
		$\Sigma_1$	
Frequ	ienzbereich	$rac{\Sigma_2}{\Sigma_3}$	
	klassische Stabilitätstests	$\tau_{12}$	
	Frequency-Sweeping-Tes	t τ <sub>21</sub>	
	Test über konstante Matrize	τ <sub>31</sub> τ <sub>31</sub>	
	Small-Gain-Ansätze	$\tau_{13}$	
		t <sub>23</sub>	
Zeitbe	ereich	τ <sub>12</sub> τ <sub>21</sub>	
	Theorem von Ljapunow-Kra	asovskii <sup>v</sup> 31	
	Theorem von Razumikhin	$\tau_{13}$	
	Matrix-Norm	τ <sub>23</sub> - τ	y y X

t9	Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick	Stabilität im Frequenzbereich Idee Ergebnisse für das Netzwerk Beispiel

# Übersicht

IS



2) Verschiedene Analyse-Methoden



4 Zusammenfassung und Ausblick





Stabilität im Frequenzbereich Idee Ergebnisse für das Netzwerk Beispiel

### Stabilität im Frequenzbereich

Netzwerk-Modell:

$$M: \dot{x}(t) = a x(t) + b C x(t-\tau), \quad \tau = const.$$

• charakteristisches Quasipolynom:

$$p(s, e^{-\tau s}) = \det\left(sI - aI - bCe^{-\tau s}\right) = 0$$



Stabilität im Frequenzbereich Idee Ergebnisse für das Netzwerk Beispiel

### Stabilität im Frequenzbereich

Netzwerk-Modell:

$$M: \dot{x}(t) = a x(t) + b C x(t-\tau), \quad \tau = const.$$

• charakteristisches Quasipolynom:

$$p(s, e^{-\tau s}) = \det\left(sI - aI - bCe^{-\tau s}\right) = 0$$

M ist asymptotisch stabil.  $\Leftrightarrow$   $\operatorname{Re}(s^*) < 0, \ \forall s^* : \ p(s^*, e^{-\tau s^*}) = 0$ 

ist <sup>o</sup>	Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick	Stabilität im Frequenzbereich Idee Ergebnisse für das Netzwerk Beispiel	
ldee			

### Annahme:

### M stabil für $\tau = 0$

<u>ist</u> o	Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick	Stabilität im Frequenzbereich <b>Idee</b> Ergebnisse für das Netzwerk Belspiel
Idee		

Annahme: M stabil für  $\tau = 0$ 

Stabilitätsbereich: *M* stabil für  $\tau \in [0, \overline{\tau})$ 

$$\overline{\tau} := \min\left\{\tau \ge 0 \mid p(j\omega, e^{-j\omega\tau}) = 0, \ \omega > 0\right\}$$

isto	Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick	Stabilität im Frequenzbereich Idee Ergebnisse für das Netzwerk Beispiel	
Idee			

Annahme: M stabil für  $\tau = 0$ 

Stabilitätsbereich: *M* stabil für  $\tau \in [0, \overline{\tau})$ 

$$\overline{\tau} := \min\left\{\tau \ge 0 \mid p(j\omega, e^{-j\omega\tau}) = 0, \ \omega > 0\right\}$$

totzeitunabhängig stabil:M ist stabil für alle  $\tau > 0$ .totzeitabhängig stabil:M ist stabil für alle  $\tau \in [0, \overline{\tau}), \ \overline{\tau} < \infty$ .



Stabilität im Frequenzbereich Idee Ergebnisse für das Netzwerk Beispiel

# Frequency-Sweeping-Test

$$\overline{\tau} := \min\left\{\tau \ge 0 \mid p(j\omega, e^{-j\omega\tau}) = 0, \ \omega > 0\right\}$$

gesucht: 
$$(\omega^*, \tau^*): p(j\omega^*, e^{-j\omega^*\tau^*}) = 0$$



Stabilität im Frequenzbereich Idee Ergebnisse für das Netzwerk Beispiel

# Frequency-Sweeping-Test

$$\overline{\tau} := \min\left\{\tau \ge 0 \mid p(j\omega, e^{-j\omega\tau}) = 0, \ \omega > 0\right\}$$

gesucht:	$(\omega^*,\tau^*)$ :	$p(j\omega^*, e^{-j\omega^*\tau^*}) = 0$

### Berechnung:



Bestimmung von ω\*:

$$\left|\lambda_{i}\left[\left(j\omega^{*}I-aI\right)^{-1}bC\right]\right|=1\,,\quad\omega^{*}>0$$

Bestimmung von τ\*:

$$\lambda_i \left[ \left( j \omega^* I - a I \right)^{-1} b C \right] = e^{j \omega^* \tau^*}, \quad \tau^* > 0$$



Stabilitä in Frequenzbereich Idee Ergebnisse für das Netzwerk Beispiel

## Ergebnisse für das Netzwerk

Das Netzwerk

$$M: \dot{x}(t) = a x(t) + b C x(t - \tau)$$

mit  $\tau = const.$  ist genau dann totzeitunabhängig stabil, wenn





Stabilitä in Frequenzbereich Idee Ergebnisse für das Netzwerk Beispiel

## Ergebnisse für das Netzwerk

Das Netzwerk

$$M: \dot{x}(t) = a x(t) + b C x(t - \tau)$$

mit  $\tau = const.$  ist genau dann totzeitunabhängig stabil, wenn (i) a < 0,





Stabilitätiß Frequenzbereich Idee Ergebnissefür das Netzwerk Beispiel

## Ergebnisse für das Netzwerk

Das Netzwerk

$$M: \dot{x}(t) = ax(t) + bCx(t - \tau)$$

mit  $\tau = const.$  ist genau dann totzeitunabhängig stabil, wenn (i) a < 0,

(*ii*) 
$$b^2 \rho^2(C) \le a^2$$
 und





Stabilitätiß Frequenzbereich Idee Ergebnissefür das Netzwerk Beispiel

## Ergebnisse für das Netzwerk

Das Netzwerk

$$M: \dot{x}(t) = a x(t) + b C x(t - \tau)$$

mit  $\tau = const.$  ist genau dann totzeitunabhängig stabil, wenn (i) a < 0, (ii)  $b^2 \rho^2 (C) \le a^2$  und (iii)  $a + b \operatorname{Re}[\lambda_i(C)] < 0.$ 





Stabilitätiß Frequenzbereich Idee Ergebnissefür das Netzwerk Beispiel

## Ergebnisse für das Netzwerk

Das Netzwerk

$$M: \dot{x}(t) = a x(t) + b C x(t - \tau)$$

mit  $\tau = const.$  ist genau dann totzeitunabhängig stabil, wenn (i) a < 0, (ii)  $b^2 \rho^2 (C) \le a^2$  und (iii)  $a + b \operatorname{Re}[\lambda_i(C)] < 0.$ 



### $\Rightarrow$ Stabilitätsbereich nur vom Spektralradius $\rho(C)$ abhängig



Stabilitätiß Frequenzbereich Idee Ergebnissefür das Netzwerk Beispiel

## Ergebnisse für das Netzwerk

Das Netzwerk

$$M: \dot{x}(t) = a x(t) + b C x(t - \tau)$$

mit  $\tau = const.$  ist genau dann totzeitunabhängig stabil, wenn (i) a < 0, (ii)  $b^2 \rho^2 (C) \le a^2$  und (iii)  $a + b \operatorname{Re} [\lambda_i (C)] < 0.$ 



### $\Rightarrow$ Stabilitätsbereich nur vom Spektralradius ho(C) abhängig



Stabilität im Frequenzbereich Idee Ergebnisse für das Netzwerk Beispiel

## Ergebnisse für das Netzwerk

### totzeitabhängige Stabilität:

$$\overline{\tau} = \min_{k} \left\{ \frac{1}{\omega_{k}} \arccos\left( \frac{\omega_{k} \ln\left(\lambda_{k}\left(C\right)\right) - a \operatorname{Re}\left(\lambda_{k}\left(C\right)\right)}{b \left|\lambda_{k}(C)\right|^{2}} \right) \right\}$$

mit

$$\omega_k = \sqrt{b^2 |\lambda_k(C)|^2 - a^2}, \quad b^2 |\lambda_k(C)|^2 - a^2 > 0, \ k \in \{1, \dots, n\}$$



Stabilität im Frequenzbereich Idee Ergebnisse für das Netzwerk Beispiel

## Ergebnisse für das Netzwerk

### totzeitabhängige Stabilität:

$$\overline{\tau} = \min_{k} \left\{ \frac{1}{\omega_{k}} \arccos\left( \frac{\omega_{k} \ln\left(\lambda_{k}\left(C\right)\right) - a \operatorname{Re}\left(\lambda_{k}\left(C\right)\right)}{b \left|\lambda_{k}(C)\right|^{2}} \right) \right\}$$

mit

$$\omega_k = \sqrt{b^2 |\lambda_k(C)|^2 - a^2}, \quad b^2 |\lambda_k(C)|^2 - a^2 > 0, \ k \in \{1, \dots, n\}$$

- Stabilitätsverhalten nur von den Eigenwerten der Verknüpfungsmatrix λ<sub>i</sub>(C) abhängig.
- Parameterabhängige Stabilitätsaussagen für *beliebiges n*-Knoten-Netzwerk möglich.







# Übersicht



2) Verschiedene Analyse-Methoden

- 3 Frequency-Sweeping-Test
- 4 Zusammenfassung und Ausblick



Modell des Netzw Verschiedene Analyse-Meth Frequency-Sweeping Zusammenfassung und Aug	rerks X1 oden -Test X2 bildk 7
Zusammenfassung und A	usblick
	$f_{R}, f_{L}$
Zusammenfassung:	$\sum_{1}^{1}$
<ul> <li>vernetzte dynamische Syste</li> <li>Datenübertragung</li> </ul>	eme <i>mit Verzögerungen</i> in der $2_3$
<ul> <li>Fokus auf Netzwerk-Topolog</li> </ul>	gie $ au_{21}$
<ul> <li>notwendige und hinreichence</li> <li><i>n</i>-Knoten-Netzwerk</li> <li>→ nur von den Eigenwerte</li> </ul>	de Stabilitätsbedingungen für beliebiges $\tau_{13}$ en $\lambda_i(C)$ abhängig $\tau_{23}$ $\tau_{12}$ $\tau_{21}$ $\tau_{31}$ $\tau_{13}$ $\tau_{13}$ $\tau_{23}$ $\tau_{12}$ $\tau_{21}$ $\tau_{31}$ $\tau_{32}$ $\tau_{31}$ $\tau_{32}$ $\tau_{31}$ $\tau_{31}$ $\tau_{32}$ $\tau_{31}$ $\tau_{31}$ $\tau_{32}$ $\tau_{32}$ $\tau_{33}$ $\tau$

isto	Modell des Netzwerks Verschiedene Analyse-Methoden Frequency-Sweeping-Test Zusammenfassung und Ausblick	$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \overline{x}_2 \end{array}$
Zusammenfassung und Ausblick		
		$f_R, f_L$
Zus	ammenfassung:	$\Sigma_1$
٥	vernetzte dynamische Systeme m Datenübertragung	nit Verzögerungen in der $\frac{\Sigma_2}{\Sigma_3}$
۲	Fokus auf Netzwerk-Topologie	τ <sub>21</sub>
٩	notwendige und hinreichende Sta $n$ -Knoten-Netzwerk $\rightarrow$ nur von den Eigenwerten $\lambda_i$	abilitätsbedingungen für beliebiges $ au_{ au_{13}}^{ au_{31}}$ en für beliebiges $(C)$ abhängig $ au_{ au_{23}}^{ au_{23}}$
Aus •	blick: Verallgemeinerung des Modells	τ <sub>21</sub> τ <sub>31</sub> τ <sub>13</sub> τ <sub>23</sub>



### Angela Schöllig

![](_page_43_Figure_2.jpeg)

![](_page_44_Picture_0.jpeg)

# Spezialfälle

$$\begin{split} \overline{\tau} &= \min_{k} \left\{ \frac{1}{\omega_{k}} \arccos\left( \frac{\omega_{k} \operatorname{Im}\left(\lambda_{k}\left(C\right)\right) - a \operatorname{Re}\left(\lambda_{k}\left(C\right)\right)}{b \left|\lambda_{k}(C)\right|^{2}} \right) \right\} \\ \omega_{k} &= \sqrt{b^{2} \left|\lambda_{k}(C)\right|^{2} - a^{2}}, \quad b^{2} \left|\lambda_{k}(C)\right|^{2} - a^{2} > 0, \ k \in \{1, \dots, n\} \end{split}$$

### symmetrische Verknüpfungsstruktur $C = C^T$ :

reelle Eigenwerte

• 
$$\overline{\tau} = \frac{1}{\sqrt{b^2 \lambda_{max}^2 - a^2}} \arccos\left(\frac{-a}{b \lambda_{max}}\right)$$

schiefsymmetrische Verknüpfungsstruktur  $C = -C^T$ :

• rein imaginäre, konjungiert komplexe Eigenwerte

• 
$$\overline{\tau} = \frac{1}{2\sqrt{b^2\rho^2 - a^2}} \arccos\left(1 - \frac{2a^2}{b^2\rho^2}\right)$$