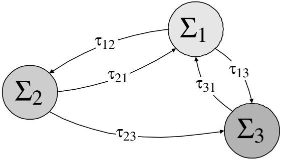
Stabilitätsanalyse von vernetzten Systemen mit Verzögerungen in der Datenübertragung

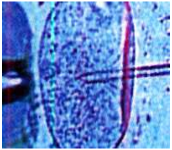
– Studienarbeit –

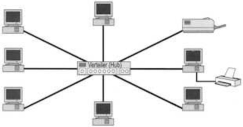
Angela Schöllig

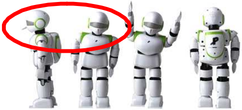
26.07.2006

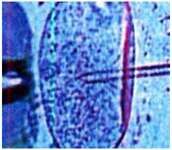


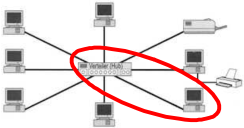


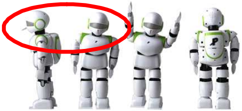


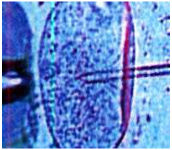


Verteiler (Hub)



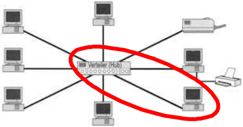



Verteiler (Hub)





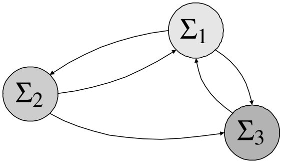
stabil?



Problemstellung

- Menge von dynamischen Systemen:

$$\begin{aligned} \Sigma_i: \quad \dot{x}_i(t) &= f_i(x_i(t), u_i(t)) \\ y_i &= h_i(x_i) \end{aligned}$$



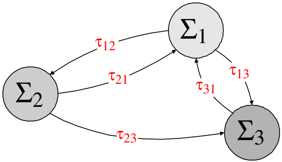
- Verknüpfung:

$$u_i(t) = g_i(y_{j_1}(t), \ldots, y_{j_{m_i}}(t))$$

Problemstellung

- Menge von dynamischen Systemen:

$$\Sigma_i : \quad \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_i(t), u_i(t)) \\ y_i &= h_i(x_i) \end{aligned}$$



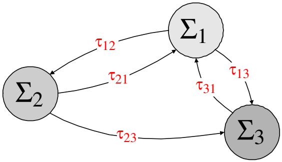
- Verknüpfung:

$$u_i(t) = g_i(y_{j_1}(t - \tau_{i,j_1}), \ldots, y_{j_{m_i}}(t - \tau_{i,j_{m_i}}))$$

Problemstellung

- Menge von dynamischen Systemen:

$$\Sigma_i : \quad \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_i(t), u_i(t)) \\ y_i &= h_i(x_i) \end{aligned}$$



- Verknüpfung:

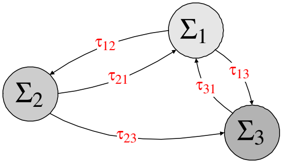
$$u_i(t) = g_i(y_{j_1}(t - \tau_{i,j_1}), \ldots, y_{j_{m_i}}(t - \tau_{i,j_{m_i}}))$$

$\Rightarrow$ **Totzeit-System**

Problemstellung

- Menge von dynamischen Systemen:

$$\Sigma_i: \quad \begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_i(t), u_i(t)) \\ y_i &= h_i(x_i) \end{aligned}$$



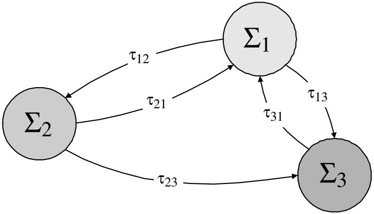
- Verknüpfung:

$$u_i(t) = g_i\left(y_{j_1}(t - \tau_{i,j_1}), \ldots, y_{j_{m_i}}(t - \tau_{i,j_{m_i}})\right)$$

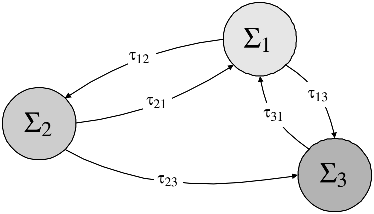
$\Rightarrow$ **Totzeit-System**

Ist das vernetzte System mit Zeitverzögerungen stabil?

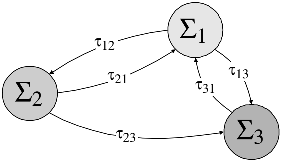
Inhaltsverzeichnis



Übersicht



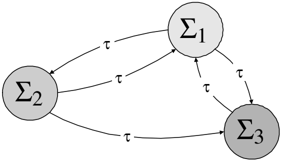
Vereinfachungen



Vereinfachungen

- Zeitverzögerungen:

$$\tau_{i,j_k} = \tau = const.$$



Vereinfachungen

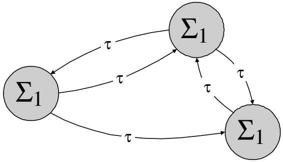
- Zeitverzögerungen:

$$\tau_{i,j_k} = \tau = const.$$

- Dynamik der Systeme:

$$\Sigma_1 : \quad \dot{x}_i(t) = a x_i(t) + b u_i(t)$$

mit $a, b, x, u \in \mathbb{R}$



Vereinfachungen

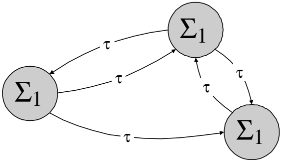
- Zeitverzögerungen:

$$\tau_{i,j_k} = \tau = const.$$

- Dynamik der Systeme:

$$\Sigma_1 : \quad \dot{x}_i(t) = a x_i(t) + b u_i(t)$$

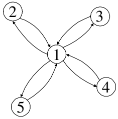
mit $a, b, x, u \in \mathbb{R}$

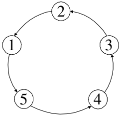


Welchen Einfluss hat die *Verknüpfungsstruktur* auf die Stabilität?

Verknüpfungsstruktur

Verknüpfungsstruktur

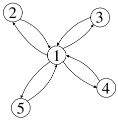


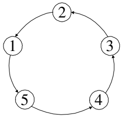


$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung der Verknüpfungsstruktur $\longrightarrow$ **Verknüpfungsmatrix** C

Verknüpfungsstruktur





$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung der Verknüpfungsstruktur $\rightarrow$ **Verknüpfungsmatrix** C

- Gewichtsfaktoren:

$$c_{ij} \in \{-1, 1, 0\}$$

- Eingang:

$$u_i(t) = \sum_{j \neq i} c_{ij} x_j(t - \tau)$$

Modell des Netzwerks

- Dynamik der Systeme:

$$\dot{x}_i(t) = ax_i(t) + bu_i(t)$$

- Eingang:

$$u_i(t) = \sum_{j \neq i} c_{ij} x_j(t - \tau)$$

- Gewichtsfaktoren:

$$c_{ij} \in \{-1, 1, 0\}$$

Modell des Netzwerks

- Dynamik der Systeme:

$$\dot{x}_i(t) = a x_i(t) + b u_i(t)$$

- Eingang:

$$u_i(t) = \sum_{j \neq i} c_{ij} x_j(t - \tau)$$

- Gewichtsfaktoren:

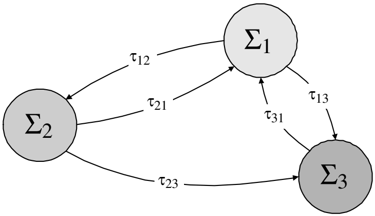
$$c_{ij} \in \{-1, 1, 0\}$$

Gesamt-System: $\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,C\,x(t-\tau)$

mit Anfangsbedingung $x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \; -\tau \leq \theta \leq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n, \; C \in \mathbb{R}^{n \times n}, \; a, b, \tau \in \mathbb{R}$

Übersicht

1. Modell des Netzwerks
2. Verschiedene Analyse-Methoden
3. Frequency-Sweeping-Test
4. Zusammenfassung und Ausblick



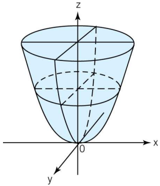
Verschiedene Analyse-Methoden

Frequenzbereich

- klassische Stabilitätstests
- Frequency-Sweeping-Test
- Test über konstante Matrizen
- Small-Gain-Ansätze

Zeitbereich

- Theorem von Ljapunow-Krasovskii
- Theorem von Razumikhin
- Matrix-Norm



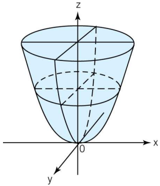
Verschiedene Analyse-Methoden

Frequenzbereich

- klassische Stabilitätstests
- **Frequency-Sweeping-Test**
- Test über konstante Matrizen
- Small-Gain-Ansätze

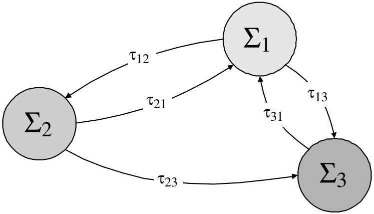
Zeitbereich

- Theorem von Ljapunow-Krasovskii
- Theorem von Razumikhin
- Matrix-Norm



Übersicht

1. Modell des Netzwerks
2. Verschiedene Analyse-Methoden
3. Frequency-Sweeping-Test
4. Zusammenfassung und Ausblick



Stabilität im Frequenzbereich

- Netzwerk-Modell:

$$M: \quad \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,C\,x(t-\tau)\,, \quad \tau = const.$$

- charakteristisches *Quasipolynom*:

$$p(s, e^{-\tau s}) = \det\left(sI - aI - b\,Ce^{-\tau s}\right) = 0$$

Stabilität im Frequenzbereich

- Netzwerk-Modell:

$$M: \quad \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,C\,x(t-\tau)\,, \quad \tau = const.$$

- charakteristisches *Quasipolynom*:

$$p(s, e^{-\tau s}) = \det\left(sI - aI - b\,Ce^{-\tau s}\right) = 0$$

M ist asymptotisch stabil. $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\,(s^*) < 0\,, \;\; \forall s^* : \; p(s^*, e^{-\tau s^*}) = 0$

Idee

Annahme: M stabil für $\tau = 0$

Idee

Annahme: M stabil für $\tau = 0$

Stabilitätsbereich: M stabil für $\tau \in [0, \bar{\tau})$

$$\bar{\tau} := \min\left\{\tau \geq 0 \mid p(j\omega, e^{-j\omega\tau}) = 0\,,\ \omega > 0\right\}$$

Idee

Annahme: M stabil für $\tau = 0$

Stabilitätsbereich: M stabil für $\tau \in [0, \bar{\tau})$

$$\bar{\tau} := \min\left\{\tau \geq 0 \mid p(j\omega, e^{-j\omega\tau}) = 0\,,\ \omega > 0\right\}$$

totzeitunabhängig stabil: M ist stabil für alle $\tau > 0$.

totzeitabhängig stabil: M ist stabil für alle $\tau \in [0, \bar{\tau})\,,\ \bar{\tau} < \infty$.

Frequency-Sweeping-Test

$$\bar{\tau} := \min\left\{\tau \geq 0 \mid p(j\omega, e^{-j\omega\tau}) = 0\,,\ \omega > 0\right\}$$

gesucht: $(\omega^*, \tau^*) : \quad p(j\omega^*, e^{-j\omega^*\tau^*}) = 0$

Frequency-Sweeping-Test

$$\bar{\tau} := \min\left\{\tau \geq 0 \mid p(j\omega, e^{-j\omega\tau}) = 0\,,\ \omega > 0\right\}$$

gesucht: $(\omega^*, \tau^*):\quad p(j\omega^*, e^{-j\omega^*\tau^*}) = 0$

Berechnung:

1. Bestimmung von ω^*:

$$\left|\lambda_i\left[(j\omega^* I - a\,I)^{-1}\, b\, C\right]\right| = 1\,, \quad \omega^* > 0$$

2. Bestimmung von τ^*:

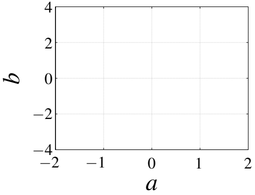
$$\lambda_i\left[(j\omega^* I - a\,I)^{-1}\, b\, C\right] = e^{j\omega^*\tau^*}, \quad \tau^* > 0$$

Ergebnisse für das Netzwerk

Das Netzwerk

$$M: \quad \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,C\,x(t-\tau)$$

mit $\tau = const.$ ist genau dann *totzeitunabhängig stabil*, wenn



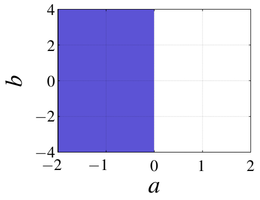
Ergebnisse für das Netzwerk

Das Netzwerk

$$M: \quad \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,C\,x(t-\tau)$$

mit $\tau = const.$ ist genau dann *totzeitunabhängig stabil*, wenn

$(i) \quad a < 0\,,$



Ergebnisse für das Netzwerk

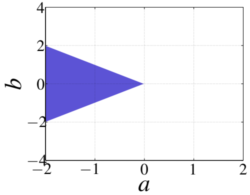
Das Netzwerk

$$M: \quad \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,C\,x(t-\tau)$$

mit $\tau = const.$ ist genau dann *totzeitunabhängig stabil*, wenn

(i) $\quad a < 0\,,$

(ii) $\quad b^2\,\rho^2\,(C) \leq a^2$ und



$$\rho(C) = \max_i |\lambda_i(C)| = 1$$

Ergebnisse für das Netzwerk

Das Netzwerk

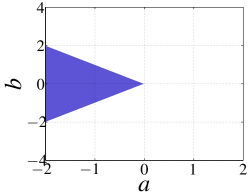
$$M: \quad \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,C\,x(t-\tau)$$

mit $\tau = const.$ ist genau dann *totzeitunabhängig stabil*, wenn

(i) $a < 0$,

(ii) $b^2\,\rho^2\,(C) \leq a^2$ und

(iii) $a + b\,\mathrm{Re}\,[\lambda_i\,(C)] < 0$.



$$\rho(C) = \max_i |\lambda_i(C)| = 1$$

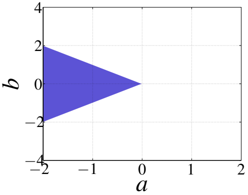
Ergebnisse für das Netzwerk

Das Netzwerk

$$M: \quad \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,C\,x(t-\tau)$$

mit $\tau = const.$ ist genau dann *totzeitunabhängig stabil*, wenn

(i) $a < 0$,
(ii) $b^2 \rho^2(C) \leq a^2$ und
(iii) $a + b\,\mathrm{Re}[\lambda_i(C)] < 0$.



$$\rho(C) = \max_i |\lambda_i(C)| = 1$$

$\Rightarrow$ **Stabilitätsbereich nur vom Spektralradius $\rho(C)$ abhängig**

Ergebnisse für das Netzwerk

Das Netzwerk

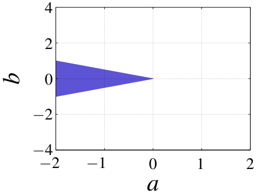
$$M: \quad \dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,C\,x(t-\tau)$$

mit $\tau = const.$ ist genau dann *totzeitunabhängig stabil*, wenn

$(i)\quad a < 0\,,$

$(ii)\quad b^2\,\rho^2\,(C) \leq a^2$ und

$(iii)\quad a + b\,\mathrm{Re}\,[\lambda_i\,(C)] < 0\,.$



$$\rho(C) = \max_i |\lambda_i(C)| = 2$$

$\Rightarrow$ **Stabilitätsbereich nur vom Spektralradius $\rho(C)$ abhängig**

Ergebnisse für das Netzwerk

totzeitabhängige Stabilität:

$$\bar{\tau} = \min_k \left\{ \frac{1}{\omega_k} \arccos \left(\frac{\omega_k \, \mathrm{Im}\left(\lambda_k\left(C\right)\right) - a \, \mathrm{Re}\left(\lambda_k\left(C\right)\right)}{b \left|\lambda_k(C)\right|^2} \right) \right\}$$

mit

$$\omega_k = \sqrt{b^2 \, |\lambda_k(C)|^2 - a^2}, \quad b^2 \, |\lambda_k(C)|^2 - a^2 > 0, \;\; k \in \{1, \ldots, n\}$$

Ergebnisse für das Netzwerk

totzeitabhängige Stabilität:

$$\bar{\tau} = \min_k \left\{ \frac{1}{\omega_k} \operatorname{arccos}\left(\frac{\omega_k \operatorname{Im}(\lambda_k(C)) - a \operatorname{Re}(\lambda_k(C))}{b\,|\lambda_k(C)|^2} \right) \right\}$$

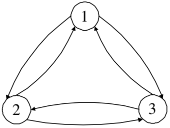
mit

$$\omega_k = \sqrt{b^2\,|\lambda_k(C)|^2 - a^2}, \quad b^2\,|\lambda_k(C)|^2 - a^2 > 0, \;\; k \in \{1, \dots, n\}$$

- Stabilitätsverhalten nur von den *Eigenwerten* der Verknüpfungsmatrix $\lambda_i(C)$ abhängig.
- Parameterabhängige Stabilitätsaussagen für *beliebiges* n-Knoten-Netzwerk möglich.

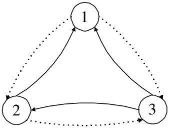
Netz-Struktur

symmetrisch:



$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

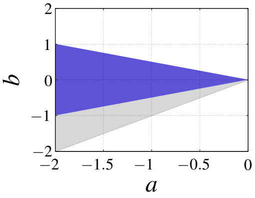
schiefsymmetrisch:

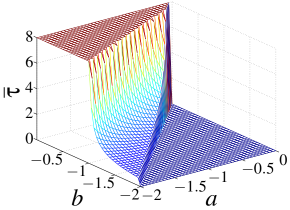


$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

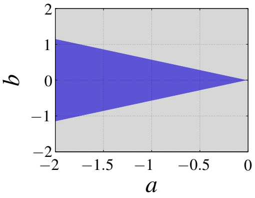
Netz-Struktur

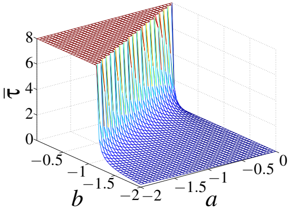
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



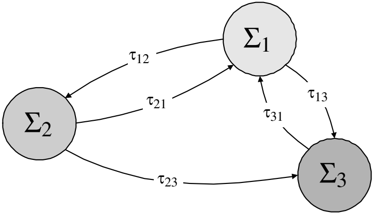


$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$





Übersicht



Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung:

- vernetzte dynamische Systeme *mit Verzögerungen* in der Datenübertragung
- Fokus auf Netzwerk-Topologie
- notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingungen für *beliebiges* n-Knoten-Netzwerk
  $\longrightarrow$ nur von den Eigenwerten $\lambda_i(C)$ abhängig

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung:

- vernetzte dynamische Systeme *mit Verzögerungen* in der Datenübertragung
- Fokus auf Netzwerk-Topologie
- notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingungen für *beliebiges* n-Knoten-Netzwerk
  $\rightarrow$ nur von den Eigenwerten $\lambda_i(C)$ abhängig

Ausblick:

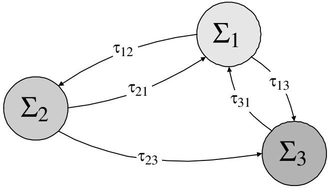
- Verallgemeinerung des Modells

Stabilitätsanalyse von vernetzten Systemen mit Verzögerungen in der Datenübertragung

– Studienarbeit –

Angela Schöllig

26.07.2006



Spezialfälle

$$\bar{\tau} = \min_k \left\{ \frac{1}{\omega_k} \operatorname{arccos} \left(\frac{\omega_k \operatorname{Im}(\lambda_k(C)) - a \operatorname{Re}(\lambda_k(C))}{b\,|\lambda_k(C)|^2} \right) \right\}$$

$$\omega_k = \sqrt{b^2\,|\lambda_k(C)|^2 - a^2}, \quad b^2\,|\lambda_k(C)|^2 - a^2 > 0, \;\; k \in \{1, \ldots, n\}$$

symmetrische Verknüpfungsstruktur $C = C^T$:

- reelle Eigenwerte
- $\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{b^2\lambda_{max}^2 - a^2}} \arccos\left(\frac{-a}{b\lambda_{max}}\right)$

schiefsymmetrische Verknüpfungsstruktur $C = -C^T$:

- rein imaginäre, konjungiert komplexe Eigenwerte
- $\bar{\tau} = \frac{1}{2\sqrt{b^2\rho^2 - a^2}} \arccos\left(1 - \frac{2a^2}{b^2\rho^2}\right)$