

Studienarbeit IST-51



Stabilitätsanalyse von vernetzten Systemen mit Verzögerungen in der Datenübertragung

Angela Schöllig

Betreuer: Dipl.-Ing. Ulrich Münz

Universität Stuttgart
Institut für Systemtheorie und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. F. Allgöwer

Juli 2006

Abstract

In dieser Arbeit wird die Stabilität von digital vernetzten dynamischen Systemen untersucht. Ein wesentliches Merkmal dieser Netzwerke ist, dass bei der Datenübertragung zwischen den einzelnen Teilsystemen Zeitverzögerungen auftreten. Der Einfluss dieser Zeitverzögerungen auf die Stabilität des Netzwerks ist von Interesse. Dazu wird ein einfaches Netzwerk-Modell hergeleitet und dessen Stabilitätsverhalten mit Hilfe verschiedener Stabilitätskriterien im Frequenz- wie auch im Zeitbereich analysiert. Ziel der Arbeit ist es zum einen, die Stabilitätseigenschaften von Netzwerken zu bestimmen. Zum anderen werden die unterschiedlichen Stabilitätskriterien bezüglich ihrer Anwendbarkeit auf digital vernetzte Systeme verglichen. Betrachtet wird dabei sowohl der Fall konstanter, als auch der Fall varianter Zeitverzögerungen.

In this work we study the stability of networked systems with communication delays. More precisely we are interested in analysing the influence of communication delays on the stability of networks. A simple model for networked systems is derived and the stability of this model is investigated by applying different stability criteria. We use both frequency domain and time domain stability methods. On the one hand, we want to study the behavior of networked systems with communication delays. On the other hand, it is interesting to compare the different stability criteria. In this work we consider constant as well as time-variant communication delays.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	13		
1 Einleitung	15		
2 Systeme mit Totzeit	19		
2.1 Mathematische Beschreibung von Totzeit-Systemen	19		
2.2 Begriffe	20		
2.3 Stabilitätsdefinition für Totzeit-Systeme	22		
2.4 Stabilität von Totzeit-Systemen im Frequenzbereich	23		
2.5 Stabilität von Totzeit-Systemen im Zeitbereich	25		
2.5.1 Das Ljapunow-Krasovskii Theorem	25		
2.5.2 Das Razumikhin Theorem	26		
3 Netzwerke	27		
3.1 Einführung	27		
3.2 Das 2×2 -System	28		
3.3 Mathematische Beschreibung von dynamisch vernetzten Systemen	30		
3.4 Das $n \times n$ -System	31		
3.5 Spezialfälle und Beispielverknüpfungen	33		
3.5.1 Symmetrische Verknüpfungsmatrizen	33		
3.5.2 Schiefsymmetrische Verknüpfungsmatrizen	35		
3.5.3 Die Kreis-Struktur	38		
3.6 Knotennummerierung	39		
3.7 Skalierung der Verknüpfungsmatrix	41		
3.8 Anwendungsbeispiel: Netzwerktopologie	43		
		4 Stabilität von Systemen mit konstanter Totzeit im Frequenzbereich	45
		4.1 Einführung und Übersicht	45
		4.2 Allgemeine Vorgehensweise	46
		4.3 Klassische Stabilitätstests	48
		4.3.1 Idee	48
		4.3.2 Stabilitätsaussagen für das 2×2 -System	49
		a. Definition eines konjugierten Polynoms	50
		b. Direkte Methode	53
		c. Pseudo-Delay-Methode	54
		4.3.3 Zusammenfassung	56
		4.4 Frequency-Sweeping-Test	57
		4.4.1 Idee	57
		4.4.2 Stabilitätsaussagen für das $n \times n$ -System	59
		4.4.3 Vergleich mit Small-Gain-Theorem	63
		4.4.4 Spezialfälle und Beispielverknüpfungen	65
		a. Symmetrische Verknüpfungsmatrizen	65
		b. Schiefsymmetrische Verknüpfungsmatrizen	71
		c. Die Kreis-Struktur	75
		4.4.5 Vergleich der verschiedenen Netzwerk-Strukturen	77
		a. Vergleich der Stabilitätsbereiche	77
		b. Vergleich der Totzeit $\bar{\tau}$	78
		4.4.6 Zusammenfassung	79
		4.5 Test über konstanten Matrizen	80
		4.6 Vergleich der Analysemethoden	80
		5 Stabilität von Systemen mit konstanter Totzeit im Zeitbereich	83
		5.1 Einführung und Übersicht	83
		5.2 Totzeitunabhängige Stabilitätskriterien	85
		5.3 Totzeitabhängige Stabilitätskriterien	87
		5.3.1 Explizite Modell-Transformation	87
		5.3.2 Implizite Modell-Transformation	88
		5.3.3 Diskretisiertes Ljapunow-Funktional	89
		5.4 Vergleich der Analysemethoden	90
		5.4.1 Vergleich: Ljapunow-Krasovskii – Razumikhin	91
		5.4.2 Totzeitunabhängige Stabilitätskriterien	94
		5.4.3 Totzeitabhängige Stabilitätskriterien	95
		5.4.4 Tabellarische Übersicht	100

6 Vergleich: Frequenzbereich – Zeitbereich	103
7 Simulation	105
8 Stabilität von Systemen mit varianter Totzeit im Frequenzbereich	109
8.1 Schnell variierende, periodische Totzeiten	109
8.1.1 Idee	109
8.1.2 Erweiterung des Frequency-Sweeping-Tests	111
a. Totzeitunabhängige Stabilität	111
b. Totzeitabhängige Stabilität	113
8.1.3 Die schiefsymmetrische Verknüpfungsmatrix	115
8.1.4 Simulation	121
8.1.5 Bewertung der Ergebnisse und Ausblick	125
8.2 Andere Ansätze	126
9 Stabilität von Systemen mit varianter Totzeit im Zeitbereich	129
10 Ergebnisse und Ausblick	131
10.1 Zusammenfassung der Resultate	131
10.2 Ausblick	133
A Eigenwerte von Verknüpfungsmatrizen	135
A.1 Symmetrische Matrizen	135
A.2 Schiefsymmetrische Matrizen	139
A.3 Die Kreis-Struktur	141
B Herleitung von $\bar{\tau}$	143
B.1 Das allgemeine $n \times n$ -System	143
B.2 Symmetrische Matrizen	145
B.3 Schiefsymmetrische Matrizen	146
B.4 Die Kreis-Struktur	147
C Beweis der Sätze zu varianten Totzeiten	149
C.1 Totzeitunabhängige Stabilität	149
C.2 Totzeitabhängige Stabilität	151
Literaturverzeichnis	155

Abbildungsverzeichnis

3.1	SIMULINK-Plan des 2x2-Systems	29	5.1	Totzeitunabhängiger Stabilitätsbereich des 2x2-Systems (3.7) aus Stabilitätskriterien im Frequenzbereich	94
3.2	Das Netzwerk-Modell	32	5.2	Totzeitunabhängiger Stabilitätsbereich des 2x2-Systems (3.7) aus Stabilitätskriterien im Zeitbereich	95
3.3	Gerichteter Graph – Ungerichteter Graph	34	5.3	Stabilitätsverhalten des 2x2-Systems	96
3.4	Schiefsymmetrischer Graph	36	5.4	Ergebnisse der expliziten Transformation: Razumikhin	97
3.5	Änderung der Knotennummerierung	40	5.5	Ergebnisse der expliziten Transformation: Ljapunow-Krasovskii	97
3.6	Netzwerk-Topologien	44	5.6	Ergebnisse der impliziten Transformation: Ljapunow-Krasovskii	98
4.1	Stabilitätsbereiche des 2x2-System	53	5.7	Ergebnisse mit dem diskretisierten Ljapunow-Funktional: $N = 1$	99
4.2	Stabilitätsverhalten des 2x2-Systems	53	5.8	Ergebnisse mit dem diskretisierten Ljapunow-Funktional: $N = 2$	99
4.3	Einfluss von $\rho(C)$ auf den totzeitunabhängigen Stabilitätsbereich	61	5.9	Stabilitätsverhalten der symmetrischen Netz-Struktur ($n = 3$) aus Stabilitätskriterien im Frequenzbereich	99
4.4	M- Δ -Struktur	64	5.10	Vergleich der Stabilitätskriterien im Zeitbereich an symmetrischer Netz-Struktur ($n = 3$)	100
4.5	Stabilitätsbereiche symmetrischer Verknüpfungsmatrizen	67	7.1	Simulation des 2x2-Systems (3.7): $\tau = 0.65$	106
4.6	Stabilitätsverhalten der symmetrischen Netz-Struktur ($n = 3$)	69	7.2	Simulation des 2x2-Systems (3.7): $\tau = 0.66$	107
4.7	Stabilitätsverhalten der symmetrischen Stern-Struktur ($n = 3$)	70	8.1	Bestimmung von ω_{max}	117
4.8	Stabilitätsbereiche schiefsymmetrischer Verknüpfungsmatrizen	71	8.2	Totzeit $\bar{\tau}_0(\delta^*)$ für verschiedene Werte (a, b)	119
4.9	Stabilitätsverhalten der schiefsymmetrischen Netz-Struktur ($n = 3$)	73	8.3	Totzeit $\bar{\tau}_0$ des 2x2-Systems (3.7) für verschiedene Werte δ^*	120
4.10	Stabilitätsverhalten der schiefsymmetrischen Stern-Struktur ($n = 3$)	74	8.4	Stabilität des 2x2-Systems (3.7) mit $(a, b) = (-1, -1.5)$ in Abhängigkeit von $(\bar{\tau}_0, \delta^*)$	122
4.11	Stabilitätsverhalten der Kreis-Struktur	76	8.5	Stabilität des 2x2-Systems (3.7) mit $(a, b) = (-1, -2)$ in Abhängigkeit von $(\bar{\tau}_0, \delta^*)$	123
4.12	Totzeitunabhängiger Stabilitätsbereich der schiefsymmetrischen Netz-Struktur für verschiedene Anzahl an Knoten	77	8.6	Stabilität des 2x2-Systems (3.7) mit $(a, b) = (-1, -3)$ in Abhängigkeit von $(\bar{\tau}_0, \delta^*)$	124

Tabellenverzeichnis

3.1	Eigenwerte der Beispielverknüpfungen	43
4.1	Totzeitabhängiger Stabilitätsbereich symmetrischer Verknüpfungsmatrizen	66
4.2	Stabilitätseigenschaften der symmetrischen Netz-Struktur .	68
4.3	Stabilitätseigenschaften der symmetrischen Stern-Struktur	68
4.4	Stabilitätseigenschaften der schiefssymmetrischen Netz-Struktur	72
4.5	Stabilitätseigenschaften der schiefssymmetrischen Stern-Struktur	72
4.6	Stabilitätseigenschaften der Kreis-Struktur	75
4.7	Vergleich der totzeitunabhängigen Stabilitätsbereiche eines 5-Knoten-Systems	78
4.8	Vergleich der Totzeit $\bar{\tau}$ eines 3-Knoten-Systems für verschiedene Parameterpaare (a, b)	79
4.9	Vergleich der Analysemethoden im Frequenzbereich	82
5.1	Vergleich: Ljapunow-Krasovskii – Razumikhin	93
5.2	Vergleich von $\bar{\tau}$ für verschiedene Stabilitätskriterien	98
5.3	Vergleich der Analysemethoden im Zeitbereich	101
6.1	Vergleich der Stabilitätsanalyse im Zeit- und Frequenzbereich	104
8.1	Totzeit $\bar{\tau}_0(\delta^*)$ für das 2×2 -System (3.7)	120
B.1	Fallunterscheidung (1) bei der Berechnung von $\bar{\tau}$	144
B.2	Fallunterscheidung (2) bei der Berechnung von $\bar{\tau}$	144

Bezeichnungen

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n}$	Menge der reellen Zahlen, Menge der reellen $(n \times n)$ -Matrizen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven, reellen Zahlen
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{Q}^+	Menge der positiven, rationalen Zahlen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{C}_-	Punkte in der linken Halbebene $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) < 0\}$
\mathbb{C}_+	Punkte in der rechten Halbebene $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) > 0\}$
$\partial\mathbb{C}_-$	Punkte auf der imaginären Achse $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) = 0\}$
$\partial\mathbb{D}$	Punkte auf dem Einheitskreis $\{w \in \mathbb{C} \mid w = 1\}$
\bar{z}	konjugiert komplexe Zahl zu z
$\operatorname{Re}(z)$	Realteil der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Im}(z)$	Imaginärteil der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$
$ z $	Betrag der komplexen Zahl z : $ z = \sqrt{\operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)}$
$\arg(z)$	Argument von $z = e^{i\phi}$: $\arg(z) = \phi$
I	Einheitsmatrix, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$M = M^T > 0$	symmetrische, positiv definite Matrix, d.h. alle Eigenwerte sind positiv
$M = M^T < 0$	symmetrische, negativ definite Matrix, d.h. alle Eigenwerte sind negativ
$\lambda(M), \lambda_i(M)$	ein Eigenwert bzw. der i te Eigenwert der Matrix M
$\lambda_{\max}(M)$	Menge der betragsmäßig größten Eigenwerte der Matrix M
$\rho(M)$	Spektralradius der Matrix M , $\rho(M) = \max_i \lambda_i(M) $

$\rho_{\operatorname{Re}}(M)$	Betrag des größten Realteils der Eigenwerte von M : $\rho_{\operatorname{Re}} = \max_{k=1, \dots, n} \{ \operatorname{Re}(\lambda_k(M)) \}$
$X \times Y$	kartesisches Produkt zweier Mengen X und Y , Menge aller <i>geordneten</i> Paare $(x, y) : x \in X, y \in Y$; $(x, y) \neq (y, x)$
n	Anzahl der Knoten im Netzwerk
C	Verknüpfungsstruktur, Verknüpfungsmatrix
C^T	Adjazenzmatrix
C_S	skalierte Verknüpfungsmatrix
τ	Zeitverzögerung im System
τ_{\max}	maximale Zeitverzögerung im System
$\bar{\tau}$	obere Grenze des Bereiches $\tau \in [0, \bar{\tau})$, in dem das System stabil ist
$S(a, b, C)$	Stabilitätsbereich $[0, \bar{\tau})$ für Systeme der Form $\dot{x}(t) = a x(t) + b C x(t - \tau)$, $\tau = \text{const.}$ in Abhängigkeit von a, b und C
\mathcal{C}	Menge aller stetigen Funktionen, die das Intervall $[-\tau_{\max}, 0]$ nach \mathbb{R}^n abbilden
x_t	Segment der Funktion $x(t) : x_t = \{x(\xi) \mid t - \tau_{\max} \leq \xi \leq t\}$
$\ \cdot\ $	Vektor- oder Matrix-Norm
$\ \phi\ _c$	Norm einer Funktion $\phi \in \mathcal{C} : \ \phi\ _c = \sup_{-\tau_{\max} \leq \xi \leq 0} \ \phi(\xi)\ $
$p(s)$	charakteristisches Polynom
α_0	Stabilitätsexponent: $\alpha_0 = \max \{\operatorname{Re}(s) \mid p(s) = 0\}$
Δ	Unsicherheit mit H_∞ -Norm: $\ \Delta\ _\infty \leq 1$
$\mu(M)$	strukturiertes singulärer Wert von M
m	Steigung der Geraden, die den totzeitunabhängigen Bereich begrenzt
m_{grenz}	Steigung der Geraden, die den totzeitabhängigen Bereich begrenzt
N	Anzahl der Segmente, in die das Totzeit-Intervall $[-\tau, 0]$ unterteilt wird
ω	Frequenz der modulierten Totzeit
δ	Amplitude der modulierten Totzeit

Kapitel 1

Einleitung

Im Hamburger Hafen werden autonome Fahrzeuge zum Transport von Containern eingesetzt. Diese Transport-Fahrzeuge kommunizieren miteinander und tauschen Daten, wie ihre aktuelle Position und Geschwindigkeit, aus. Auf diese Weise stimmen sie ihre Fahrwege untereinander ab. Aufgrund von Signallaufzeiten kommt die Information des einen Fahrzeuges bei den anderen Fahrzeugen zeitverzögert an. Große Zeitverzögerungen können zu Störungen im Betriebsverlauf und Kollisionen führen. Dies ist dann der Fall, wenn sich die empfangene Position stark von der aktuellen Position unterscheidet. Ein Streckenabschnitt könnte von einem Fahrzeug aufgrund der empfangenen Informationen als befahrbar angenommen werden, obwohl sich dort inzwischen ein anderes Fahrzeug befindet. Verallgemeinernd lassen sich Fahrzeuge als dynamische Systeme modellieren. Durch den Datenaustausch untereinander bilden die Fahrzeuge ein vernetztes System. Mathematisch wird dieses Netzwerk wegen der auftretenden Zeitverzögerungen mit Hilfe von Totzeit-Systemen beschrieben.

Solche digital vernetzten dynamischen Systeme lassen sich in den unterschiedlichsten Bereichen finden. Mechanische, verfahrenstechnische, chemische, biologische, physikalische und sogar ökonomische Systeme können als Netzwerke modelliert werden. Ein Beispiel aus der Luft- und Raumfahrt sind Satelliten, die untereinander Informationen austauschen, um so ihre Positionen abzugleichen. Auch bei der Entwicklung von unbemannten, autonomen Fluggeräten spielt die Kommunikation eine wichtige Rolle. Hier sollen die Flugobjekte selbstständig auf neue Situationen

reagieren. Dazu sind Absprachen zwischen den Flugobjekten nötig. Ein weiteres Anwendungsfeld digital vernetzter Systeme ist die Robotik. In Zukunft sollen beispielsweise mehrere mobile Roboter gemeinsam zur Rettung und Versorgung von Menschen in Krisengebieten eingesetzt werden oder zum Reinigen von Räumen und in der Abfallbeseitigung. Aus dem Bereich der Regelungstechnik kann man die sogenannten „tele-operation systems“ [Shiotsuki und Nasu 2002] anführen. Darunter werden Prozesse verstanden, die in Echtzeit über ein Netzwerk oder über das Internet gesteuert werden. Ein Beispiel hierfür sind die Medizin-Roboter, die für minimal invasive Eingriffe eingesetzt werden. Durch die Informationsübertragung, aber auch durch Rechenzeiten entstehen Zeitverzögerungen, die das Prozessverhalten stark beeinflussen können. Ein weiterer Forschungsschwerpunkt sind Sensor-Aktor-Netze. Dies sind Rechnernetze aus Kleinst-Computern, die mit Sensoren und Aktoren ausgestattet sind. Durch Zusammenarbeit via drahtloser Kommunikation sollen sie eine gemeinsame Aufgabe bewältigen.

Bei all diesen Beispielen ist es wichtig, die Auswirkungen der Zeitverzögerungen auf die Stabilität des vernetzten Systems zu untersuchen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, verschiedene Analysemethoden für Totzeit-Systeme zu betrachten und zu vergleichen. Dabei steht die Anwendbarkeit der Methoden auf vernetzte dynamische Systeme im Vordergrund. Die Stabilität von Totzeit-Systemen kann im Frequenzbereich, wie auch im Zeitbereich untersucht werden. In dieser Arbeit werden sowohl konstante, als auch zeitvariante Totzeiten betrachtet. Ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit ist die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens eines einfachen Netzwerk-Modells.

Eine Einführung in die Thematik der Totzeit-Systeme liefert Kapitel 2. Es werden die wichtigsten Begriffe und Theoreme für Totzeit-Systeme vorgestellt. Sie bilden die Basis für das Verständnis der folgenden Kapitel. In Kapitel 3 wird ein einfaches Modell für digital vernetzte dynamische Systeme hergeleitet. Bei der Modellierung liegt der Schwerpunkt auf der Verknüpfungsstruktur. Diese mathematische Formulierung ist Ausgangspunkt für die Stabilitätsuntersuchungen in Kapitel 4 und 5. In diesen beiden Kapiteln werden vernetzte Systeme mit konstanten Totzeiten im Frequenzbereich (Kapitel 4) und im Zeitbereich (Kapitel 5) analysiert. Die Stabilität von Netzwerken mit varianten Totzeiten wird in Kapitel 8 und 9 untersucht.

In Kapitel 10 werden die Ergebnisse zusammengefasst und Themen aufgezeigt, die – unter der Verwendung der erzielten Ergebnisse – für weitere wissenschaftliche Arbeiten interessant sind.

Kapitel 2

Systeme mit Totzeit

Dieses Kapitel liefert eine Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe und Theoreme für Totzeit-Systeme. Sie bilden die Basis für das Verständnis der Stabilitätsuntersuchungen in den folgenden Kapiteln.

Kapitel 2.1 erläutert wie Totzeit-Systeme mathematisch modelliert werden. In Kapitel 2.2 werden Begriffe eingeführt, mit denen sich die Eigenschaften von Totzeit-Systemen beschreiben lassen. Die Definition der Stabilität von Totzeit-Systemen (Kapitel 2.3) bildet die Grundlage für die in Kapitel 2.4 und 2.5 vorgestellten Stabilitätskriterien im Frequenz- bzw. Zeitbereich.

2.1 Mathematische Beschreibung von Totzeit-Systemen

Allgemein lassen sich Totzeit-Systeme durch *Funktional-Differentialgleichungen* der Form

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0 \quad (2.1)$$

beschreiben.

Totzeit-Systeme unterscheiden sich in einem wesentlichen Punkt von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Die

Änderung des Zustands zum Zeitpunkt t , $\dot{x}(t)$, ist bei Totzeit-Systemen nicht nur vom aktuellen Zustand $x(t)$ abhängig, sondern auch von früheren Werten $x_t \in \mathcal{C}$ mit

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad -\tau_{max} \leq \theta \leq 0. \quad (2.2)$$

\mathcal{C} ist die Menge aller stetigen Funktionen, die das Intervall $[-\tau_{max}, 0]$ nach \mathbb{R}^n abbilden. Die Variable $\tau_{max} \geq 0$ beschreibt dabei die größte Zeitverzögerung (Totzeit), die im System auftreten kann.

Die Anfangsbedingung von (2.1) muss entsprechend für das ganze Zeitintervall $[t_0 - \tau_{max}, t_0]$ vorgegeben werden:

$$x_{t_0} = \phi, \quad \phi \in \mathcal{C} \quad \text{bzw.} \quad x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad -\tau_{max} \leq \theta \leq 0. \quad (2.3)$$

Bemerkung 2.1.

Auf die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Funktional-Differentialgleichungen wird in [Niculescu 2001],[Gu u. a. 2003] und ausführlich in [Hale und Lunel 1993] eingegangen. In dieser Arbeit werden ausschließlich *lineare* Funktional-Differentialgleichungen $\dot{x}(t) = L(t)x_t + h(t)$ betrachtet. Für diese Systeme ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung garantiert [Gu u. a. 2003].

2.2 Begriffe

Zur Beschreibung der Eigenschaften von Totzeit-Systemen sind die folgenden Begriffe wichtig [Niculescu 2001].

Verteilte Totzeit:

(engl. distributed delays)

Die rechte Seite der Funktional-Differentialgleichung (2.1) ist von *unendlich* vielen Werten $x(\xi)$, $t - \tau_{max} \leq \xi \leq t$ abhängig. Ein Beispiel aus dieser Klasse von Systemen ist

$$\dot{x}(t) = \int_{-\tau}^0 c(\theta)x(t + \theta)d\theta.$$

Diskrete Totzeit:

(engl. discrete delays)

Die rechte Seite der Funktional-Differentialgleichung (2.1) ist nur von endlich vielen Werten $x(t - \tau_i)$, $i = 0, \dots, r$ abhängig. Ein allgemeines, lineares System mit diskreten Totzeiten ist

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^r A_i x(t - \tau_i), \quad A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Kommensurable Totzeit:

(engl. commensurate delays)

Alle Totzeiten, die in dem System (2.1) auftreten, sind diskret und ganzzahlige Vielfache der Totzeit τ , d.h.

$$\tau_i = m_i \tau, \quad m_i \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

Inkommensurable Totzeiten:

(engl. incommensurate delays)

Die Zeitverzögerungen des Systems (2.1) sind diskret und es gibt mindestens ein Paar (τ_i, τ_j) , für das

$$\frac{\tau_i}{\tau_j} \notin \mathbb{Q}^+.$$

Totzeitunabhängig stabil:

(engl. delay-independent stable)

Das System (2.1) ist für alle Zeitverzögerungen $\tau_i \geq 0$ asymptotisch stabil.

Totzeitabhängig stabil:

(engl. delay-dependent stable)

Das System (2.1) ist nur für bestimmte Werte von τ , z.B. $\tau \in \{[\tau_{a_1}, \tau_{b_1}], [\tau_{a_2}, \tau_{b_2}], \dots, [\tau_{a_m}, \tau_{b_m}]\}$, asymptotisch stabil.

Häufig wird bei der Untersuchung von totzeitabhängiger Stabilität davon ausgegangen, dass das System für $\tau = 0$ stabil ist. Berechnet

wird dann die kleinste Zeitverzögerung $\bar{\tau}$, für die das System instabil wird. Es ist also nur der Totzeit-Bereich $[0, \bar{\tau})$ von Interesse, in dem das System stabil ist.

Bemerkung 2.2.

Diese Arbeit analysiert das Stabilitätsverhalten von Systemen mit einer diskreten Totzeit τ . Dabei ist wichtig, zwischen Systemen mit konstanter Totzeit $\tau = \text{const.}$ (Kapitel 4, 5) und Systemen mit zeitvarianter Totzeit $\tau = \tau(t)$ (Kapitel 8, 9) zu unterscheiden.

2.3 Stabilitätsdefinition für Totzeit-Systeme

Die Definition der Stabilität von Totzeit-Systemen erfolgt analog zur Stabilitätsdefinition für Systeme ohne Totzeit [Ludyk 1995]. Lediglich die Annahmen für die Anfangsbedingungen sind unterschiedlich.

Man definiert die Norm $\|\cdot\|_c$ für eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}$

$$\|\phi\|_c = \sup_{-\tau_{\max} \leq \xi \leq 0} \|\phi(\xi)\|. \quad (2.5)$$

Wie bei Systemen ohne Totzeit wird angenommen, dass das System (2.1) mit Anfangsbedingung (2.3) die triviale Lösung $x(t) \equiv 0$ besitzt:

Definition 2.1 (asymptotische Stabilität von Totzeit-Systemen). [Gu u. a. 2003]

Die triviale Lösung $x(t) \equiv 0$ eines System (2.1) mit Anfangsbedingung (2.3) ist asymptotisch stabil, wenn

- (i) für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass $\|x(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq t_0$, wenn $\|x_{t_0}\|_c < \delta$ und
- (ii) für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ ein $\delta_a = \delta_a(t_0, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ für $\|x_{t_0}\|_c < \delta_a$.

Bemerkung 2.3.

In den Stabilitätsuntersuchungen der folgenden Kapitel wird ausschließlich asymptotische Stabilität betrachtet. Ein asymptotisch stabiles System wird vereinfachend auch „stabil“ genannt. Entsprechend werden nicht asymptotisch stabile Systeme als „instabil“ bezeichnet.

2.4 Stabilität von Totzeit-Systemen im Frequenzbereich

Die Klasse der Systeme, die sich mittels Laplace-Transformation in den Frequenzbereich transformieren lässt, beinhaltet ausschließlich *lineare, zeitinvariante Systeme*. In diesem Zusammenhang werden lediglich lineare, zeitinvariante Systeme mit *diskreten Zeitverzögerungen* τ_i betrachtet

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^r A_i x(t - \tau_i) \quad A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tau_i \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Analog zur Definition des charakteristischen Polynoms für Systeme ohne Totzeit kann für das System (2.6) ein *charakteristisches Quasipolynom* $p(s)$ definiert werden

$$\begin{aligned} p(s) &= \det \left(sI - \sum_{i=0}^r e^{-\tau_i s} A_i \right) \\ &= p_0(s) + \sum_{k=0}^m p_k(s) e^{-h_k s}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Mit $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Funktionen $p_k(s)$, $k = 0, 1, \dots, m$ sind Polynome in s und die Werte h_k sind Summen der Zeitverzögerungen τ_k .

Das folgende Theorem liefert den Ausgangspunkt aller Stabilitätsuntersuchungen im Frequenzbereich.

Theorem 2.1. [Gu u. a. 2003]

Gegeben sei ein $\gamma \in \mathbb{R}$. Die Zahl der Lösungen s^* der charakteristischen

Gleichung $p(s) = 0$ mit $\operatorname{Re}(s^*) > \gamma$ ist endlich. Definiert man den Stabilitätsexponenten α_0 als

$$\alpha_0 = \max \{ \operatorname{Re}(s) \mid p(s) = 0 \}, \quad (2.8)$$

dann gilt:

- (i) Das lineare, zeitinvariante System (2.6) ist genau dann stabil, wenn $\alpha_0 < 0$.
- (ii) $\alpha_0(\tau)$ ist eine stetige Funktion für alle $\tau \geq 0$.

Wichtige Schlussfolgerungen sind:

- Das System (2.6) ist genau dann stabil, wenn *alle Pole*, d.h. alle Nullstellen der charakteristischen Gleichung (2.7), in der linken Halbebene \mathbb{C}_- liegen.
- Die Lage der Nullstellen des charakteristischen Quasipolynoms (2.7) bestimmt die Stabilität des Systems (2.6).
- Das charakteristische Quasipolynom (2.7) hat unendlich viele Lösungen.
- Die Stabilitätsaussagen sind *notwendig und hinreichend*.

Bemerkung 2.4.

Das Theorem 2.1 gilt auch für lineare, zeitinvariante Systeme mit verteilten Totzeiten [Gu u. a. 2003].

Bemerkung 2.5.

Das charakteristische Quasipolynom für Systeme mit kommensurablen Totzeiten vereinfacht sich zu

$$p(s, e^{-\tau s}) = \sum_{k=0}^q p_k(s) e^{-k\tau s}. \quad (2.9)$$

Die charakteristische Gleichung ist ein Polynom in zwei Variablen (s und $e^{-\tau s}$). Die Stabilitätsanalyse dieser Systeme ist wesentlich einfacher als die Untersuchung von Systemen mit inkommensurablen Totzeiten (Kapitel 4).

2.5 Stabilität von Totzeit-Systemen im Zeitbereich

Im Frequenzbereich wurde eine bekannte Methode für totzeitfreie Systeme auf Systeme mit Zeitverzögerungen erweitert. Die Bedingungen für asymptotische Stabilität sind dabei für beide System-Klassen identisch. Ein System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Pole in der linken Halbebene liegen. Bei Totzeit-Systemen müssen allerdings charakteristische *Quasipolynome* betrachtet werden.

Im Zeitbereich ist ebenfalls die Erweiterung eines bereits bestehenden Stabilitätskriteriums möglich. Mit der *Methode von Ljapunow* lässt sich auch die Stabilität von Totzeit-Systemen untersuchen. Die Analyse von Totzeit-Systemen unterscheidet sich hier von der Betrachtung von Systemen ohne Totzeit in der Wahl der Ljapunow-Funktion V .

Bei Systemen ohne Zeitverzögerungen ist $\dot{x}(t)$ nur abhängig von $x(t)$. Als Ljapunow-Funktion wird $V = V(t, x(t))$ gewählt. Da sich in Totzeit-Systemen $\dot{x}(t)$ aus Werten $x(t + \theta)$, $-\tau_{max} \leq \theta \leq 0$ berechnet (Kapitel 2.1), muss dies auch in der Ljapunow-Funktion berücksichtigt werden. Dabei gibt es zwei unterschiedliche Ansätze.

2.5.1 Das Ljapunow-Krasovskii Theorem

Die Ljapunow-Funktion ist ein *Funktional*, das von allen Zuständen $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-\tau_{max} \leq \theta \leq 0$ abhängt

$$V = V(t, x_t). \quad (2.10)$$

Ist die zeitliche Änderung des *Ljapunow-Krasovskii-Functionals* (2.10) negativ, bedeutet das, dass x_t „abnimmt“ und das System nach Definition 2.1 asymptotisch stabil ist. Das exakte Stabilitätskriterium lautet:

Theorem 2.2. [Gu u. a. 2003]

Ein Totzeit-System (2.1) ist asymptotisch stabil, wenn für $K, \varepsilon > 0$, $\phi \in \mathcal{C}$ ein Ljapunow-Krasovskii-Funktional $V(\phi)$ existiert, so dass

$$K \|\phi\|_c^2 \geq V(\phi) \geq \varepsilon \|\phi(0)\|^2 \quad (2.11)$$

und für die Ableitung entlang der System-Trajektorien $\dot{V}(\phi) = \dot{V}(x_t)|_{x_t=\phi}$

$$\dot{V}(\phi) \leq -\varepsilon \|\phi(0)\|^2 \quad (2.12)$$

gilt.

2.5.2 Das Razumikhin Theorem

Eine andere Möglichkeit den „Zustand“ x_t zu berücksichtigen und für V trotzdem eine *Funktion* zu erhalten, ist

$$\bar{V}(x_t) = \max_{\theta \in [-\tau_{max}, 0]} V(x(t + \theta)) \quad (2.13)$$

zu betrachten. Wenn $V(x(t)) < \bar{V}(x_t)$, dann nimmt $\bar{V}(x_t)$ für $\dot{V}(x(t)) > 0$ nicht zu. Damit $\bar{V}(x_t)$ abnimmt, ist $\dot{V}(x(t)) < 0$ nur dann notwendig, wenn $V(x(t)) = \bar{V}(x_t)$.

Theorem 2.3. [Gu u. a. 2003]

Ein Totzeit-System (2.1) mit maximaler Totzeit τ_{max} ist asymptotisch stabil, wenn für ein $K, \varepsilon > 0$ eine Ljapunow-Funktion $V(x(t))$ existiert, so dass

$$K \|x(t)\|^2 \geq V(x(t)) \geq \varepsilon \|x(t)\|^2 \quad (2.14)$$

ist und für die Ableitung entlang der System-Trajektorien

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\varepsilon \|x(t)\|^2 \quad (2.15)$$

gilt, wenn

$$V(x(t + \xi)) \leq pV(x(t)), \quad -\tau_{max} \leq \xi \leq 0 \quad (2.16)$$

für ein $p > 1$.

Bemerkung 2.6.

Eine allgemeinere Formulierung der Theoreme 2.2 und 2.3 findet man in [Gu u. a. 2003].

Bemerkung 2.7.

Die Theoreme 2.2 und 2.3 sind nur *hinreichende* Stabilitätskriterien und werden später in Form von linearen Matrixungleichungen (engl. Linear Matrix Inequality – LMI) formuliert.

Kapitel 3

Netzwerke

In diesem Kapitel wird ein einfaches *Modell* für digital vernetzte, dynamische Systeme vorgestellt. Diese mathematische Formulierung ist Ausgangspunkt aller weiteren Stabilitätsuntersuchungen.

Nach einer kurzen Einführung (Kapitel 3.1) wird in Kapitel 3.2 zunächst ein Netzwerk aus zwei miteinander verknüpften Teilsystemen betrachtet. In Kapitel 3.3 wird das Netzwerk als Graph interpretiert. Dies ermöglicht die Herleitung eines allgemeinen Modells für ein System bestehend aus n vernetzten Teilsystemen (Kapitel 3.4). In Kapitel 3.5 werden Beispiele für mögliche Netzwerkverknüpfungen vorgestellt. Einige Besonderheiten der Verknüpfungsstruktur werden in Kapitel 3.6 und 3.7 angesprochen. Den Abschluss bildet ein Anwendungsbeispiel (Kapitel 3.8).

3.1 Einführung

Digital vernetzte, dynamische Systeme lassen sich in vielen Bereichen finden. Die verschiedenen Beispiele aus Kapitel 1 werden in [Olfati-Saber und Murray 2004] unter dem Begriff „Multiagenten-Systeme“ zusammengefasst. Allen gemeinsam ist der Aufbau bestehend aus einer Menge von dynamischen „Agenten“, die untereinander Informationen austauschen. Jeder einzelne Agent i kann dabei durch ein Differen-

tialgleichungssystem der Form

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= f_i(x_i(t), u_i(t)) & i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ y_i &= h_i(x_i)\end{aligned}\quad (3.1)$$

beschrieben werden, wobei n die Anzahl der Agenten darstellt. Der Eingang $u_i(t)$ hängt dabei nur von den *zeitverzögerten* Ausgängen der anderen Agenten ab, d.h.

$$u_i(t) = g_i(y_{j_1}(t - \tau_{i,j_1}), y_{j_2}(t - \tau_{i,j_2}), \dots, y_{j_{m_i}}(t - \tau_{i,j_{m_i}})) \quad (3.2)$$

mit $j_k \neq i$, $k \in \{1, 2, \dots, m_i\}$. Die Zeitverzögerungen τ_{j_k} sind *diskret*, können aber mit der Zeit variieren:

$$\tau_{j_k} = \tau_{j_k}(t). \quad (3.3)$$

Zunächst wird ein einfaches System bestehend aus zwei Agenten vorgestellt. Anschließend folgt die Herleitung eines Modell für das n -Agenten-System.

3.2 Das 2x2-System

Als Einstieg in das Thema wurde ein einfaches Beispiel-System gewählt. Das in diesem Kapitel betrachtete Netzwerk ist aus nur zwei Teilsystemen (Agenten) aufgebaut. Die beiden Agenten werden durch lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{x}_i(t) = ax_i(t) + bu_i(t) \quad i \in \{1, 2\} \quad (3.4)$$

beschrieben. Vereinfachend sind die Systemparameter a und b für beide Teilsysteme gleich. Das bedeutet, dass das System eine Verknüpfung von zwei *gleichen* Agenten darstellt. Der Eingang u_i ist dabei jeweils der um τ verzögerte Zustand des anderen Teilsystems

$$u_1(t) = x_2(t - \tau), \quad u_2(t) = -x_1(t - \tau) \quad \text{mit} \quad \tau = \tau(t).$$

Durch die Wahl der *negativen* Rückführung $-x_1(t - \tau)$ als Eingang des zweiten Teilsystems erhält man einen Parameter-Bereich (a, b) , der

totzeitabhängig stabil ist. Das heißt, es gibt Systeme, die für Totzeiten $\tau < \bar{\tau}$ stabil sind, für Werte $\tau \geq \bar{\tau}$ instabil werden. Dagegen ist für einen positiven Eingang $u_2(t) = x_1(t - \tau)$ das System abhängig von (a, b) entweder für alle $\tau \geq 0$ stabil oder für alle $\tau \geq 0$ instabil (Bemerkung 4.4).

Genauere Erläuterungen zum Stabilitätsverhalten von Netzwerken liefern die Kapitel 4 und 5, sowie die Kapitel 8 und 9. Dieses 2x2-System wird in Kapitel 4.3.2. genauer untersucht.

Die Gleichungen zur Beschreibung des Gesamt-Netzwerks lauten dann

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) + bx_2(t - \tau) \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_2(t) = ax_2(t) - bx_1(t - \tau) \quad (3.6)$$

bzw.

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t - \tau), \quad \tau = \tau(t). \quad (3.7)$$

Dieses 2x2-System wird im Folgenden häufig als Beispiel herangezogen und in Simulationen verwendet (siehe Abbildung 3.1).

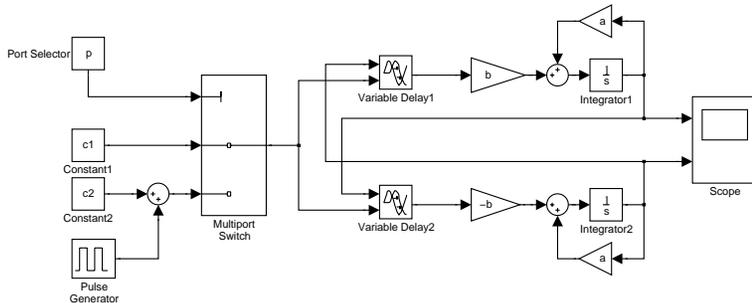


Abbildung 3.1: SIMULINK-Plan des einfachen 2x2-Systems mit konstanter oder zeitvarianter Totzeit

In diesem Kapitel wurde ausgehend von den Gleichungen für die Teilsysteme (3.5) und (3.6) die Beschreibung des Gesamt-Systems (3.7) hergeleitet. Für Netzwerke mit einer größeren Anzahl von Teilsystemen ist diese Vorgehensweise sehr aufwändig. Aus diesem Grund wird im folgenden Kapitel eine allgemeine, mathematische Beschreibung für Netzwerke

vorge stellt. Mit Hilfe dieser mathematischen Darstellung können *beliebig verknüpfte n-Agenten-Systeme* einfach modelliert werden.

3.3 Mathematische Beschreibung von dynamisch vernetzten Systemen

Als Modell für Netzwerke sind *Graphen* sehr gut geeignet. Durch die Interpretation des Netzwerks als Graph wird die Verknüpfungsstruktur stärker betont. Das dynamische Verhalten der einzelnen Teilsysteme (Gleichung 3.1) steht dabei weniger im Vordergrund.

Ein gerichteter Graph (Digraph) $G = (V, L, C)$ der Ordnung n besteht aus

- einer Menge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ von Knoten,
- einer Menge $L \subseteq V \times V$ von gerichteten Kanten und
- einer gewichteten Adjazenzmatrix $C^T = \{c_{ij}\}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Jeder Kante $l_{ij} = (v_i, v_j)$ des Graphen G wird ein Gewichtungsfaktor c_{ij} zugeordnet. Dabei gilt

- $l_{ij} \in L \Leftrightarrow c_{ij} \neq 0$,
- $c_{ii} = 0$.

Ein *Netzwerk dynamischer Systeme* kann dann durch $N = (G, x)$ dargestellt werden. G repräsentiert die Topologie, d. h. die Verknüpfungsstruktur und x stellt den Zustandsvektor des Gesamt-Systems dar.

Die Begriffe *Knoten* und *Kante* lassen sich in folgender Weise übertragen: Als Knoten werden die einzelnen Teilsysteme (Agenten) bezeichnet. Die Kanten entsprechen den Verknüpfungen zwischen den Teilsystemen. Der Eingang u_i ist eine Funktion der Ausgänge y_j der anderen Knoten (vergleiche Gleichung 3.2). Eine gerichtete Kante l_{ji} von Knoten j zu Knoten i mit Gewichtungsfaktor $c_{ji} \neq 0$ existiert, wenn der Eingang u_i eine Funktion von y_j ist

$$u_i(t) = g_i(\dots, c_{ji}y_j(t - \tau_{i,j}), \dots); \quad i \neq j; \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Der *Gewichtsfaktor* kann als Verstärkungsfaktor interpretiert werden.

3.4 Das $n \times n$ -System

In diesem Kapitel wird ein *einfaches Modell* für Netzwerke mit n Knoten vorgestellt. Ausgangspunkt hierfür ist das in Kapitel 3.3 vorgestellte allgemeine Netzwerk $N = (G, x)$ mit x aus Gleichung (3.1) und (3.2).

Die wesentlichen Punkte der Vereinfachung sind:

Dynamik der Knoten:

$$\dot{x}_i(t) = ax_i(t) + bu_i(t) \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- Die Dynamik lässt sich durch eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben.
- Alle Knoten haben das gleiche dynamische Verhalten, d.h. die Parameter a, b sind für alle Knoten gleich.

Eingang:

$$u_i(t) = \sum_{j \neq i} c_{ji} x_j(t - \tau) \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- Die Zustände der Knoten gehen linear, gewichtet mit c_{ji} in u_i ein.
- Die Zeitverzögerung $\tau = \tau(t)$ ist diskret.
- Die Totzeit ist für alle Kanten, d.h. auf allen Übertragungsstrecken zwischen zwei Knoten, gleich.

Gewichtsfaktoren:

$$c_{ij} \in \{-1, 1, 0\}.$$

- $c_{ij} = 0$:
Es existiert keine Verbindung von Knoten i zu Knoten j .

- $c_{ij} = 1$:
In die Differentialgleichung des Knotens j geht der Zustand x_i *positiv* ein.
- $c_{ij} = -1$:
In die Differentialgleichung des Knotens j geht der Zustand x_i *negativ* ein.

Abbildung 3.2 veranschaulicht die oben genannten Vereinfachungen.

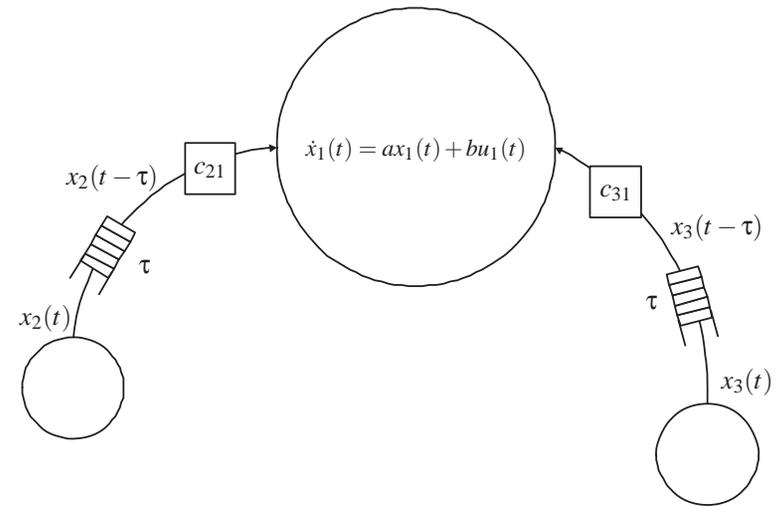


Abbildung 3.2: Das vereinfachte Netzwerk

In Matrixdarstellung ergibt sich für das $n \times n$ -System

$$\dot{x}(t) = aIx(t) + bCx(t - \tau), \quad \tau = \tau(t). \tag{3.8}$$

Die Verknüpfungsstruktur, die durch die Adjazenzmatrix C^T abgebildet wird, geht direkt in die Differentialgleichung des Gesamt-Systems ein. Ein solches Netzwerk ist durch die Wahl der Totzeit τ , der Adjazenzmatrix C^T und der „Knotenparameter“ a, b eindeutig bestimmt.

In den folgenden Stabilitätsuntersuchungen wird dieses einfache $n \times n$ -System als Netzwerk-Modell verwendet. Bei gegebener Verknüpfungsmatrix¹ C wird untersucht, für welche Parameter a, b und τ das System stabil ist.

Definition 3.1 (Stabilitätsbereich).

Der Stabilitätsbereich \mathcal{S} bezeichnet den Totzeit-Bereich $[0, \bar{\tau}]$, für den das System (3.8), $\tau = \text{const.}$ asymptotisch stabil ist

$$\mathcal{S}(a, b, C) = [0, \bar{\tau}]. \tag{3.9}$$

Der Stabilitätsbereich \mathcal{S} ist von den Parametern a, b und der Verknüpfungsmatrix C abhängig. Ist $\bar{\tau} = \infty$, dann ist das System totzeitunabhängig stabil.

3.5 Spezialfälle und Beispielverknüpfungen

Abhängig von der „Verschaltung“ der Knoten kann die Verknüpfungsmatrix C besondere Eigenschaften aufweisen. Von Interesse sind vor allem symmetrische und schief-symmetrische Verknüpfungsstrukturen. Beispielhaft werden in diesem Kapitel einige Graphen ausgewählt und untersucht. Zu den Matrizen werden jeweils die Eigenwerte berechnet, da sie die Stabilitätseigenschaften des Systems bestimmen (Kapitel 4.4.2).

Bei allen Beispielen handelt es sich um *stark zusammenhängende* Graphen. Bei stark zusammenhängenden Graphen ist jeder Knoten von jedem Knoten aus erreichbar ([Kühn 2002], [Wehlan 2004]). Diese Eigenschaft spiegelt den Charakter eines Netzwerks wider, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten Informationen austauschen kann.

3.5.1 Symmetrische Verknüpfungsmatrizen

Bei einem Graphen mit symmetrischer Verknüpfungsstruktur $C = C^T$ erhält man nach Vertauschen aller Kanten $l_{ij} = (v_i, v_j) \rightarrow (v_j, v_i)$ wieder den gleichen Graphen. Ein solcher Graph wird auch *ungerichteter* Graph genannt (Abbildung 3.3).

¹Die Transponierte der Adjazenzmatrix wird Verknüpfungsstruktur oder Verknüpfungsmatrix genannt.



Abbildung 3.3: Gerichteteter Graph – Ungerichteter Graph

Die Eigenwerte symmetrischer Matrizen sind *reell* (siehe Anhang A.1).

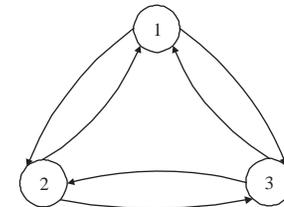
Im Folgenden werden zwei Beispiele für symmetrische Verknüpfungsmatrizen vorgestellt.

Beispiel 1 (Die Netz-Struktur).

- Verknüpfungsmatrix für n Knoten, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Graph eines 3-Knoten-Systems:



- Eigenwerte von $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\lambda_1 = n - 1, \quad \lambda_{2, \dots, n} = -1 \tag{3.10}$$

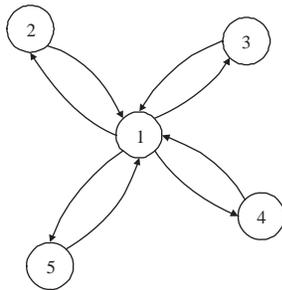
(Beweis im Anhang A.1)

Beispiel 2 (Die Stern-Struktur).

- Verknüpfungsmatrix für n Knoten, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Graph eines 5-Knoten-Systems:



- Eigenwerte von $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{n-1}, \quad \lambda_{3,\dots,n} = 0 \tag{3.11}$$

(Beweis im Anhang A.1)

3.5.2 Schiefsymmetrische Verknüpfungsmatrizen

Bei einer schiefsymmetrischen Verknüpfungsstruktur $C = -C^T$ gilt

$$\exists l_{ij} = (v_i, v_j) \text{ mit } c_{ij} \Leftrightarrow \exists l_{ji} = (v_j, v_i) \text{ mit } c_{ji} = -c_{ij}$$

(siehe Abbildung 3.4).

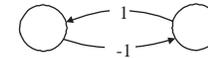


Abbildung 3.4: Schiefsymmetrischer Graph

Die Eigenwerte schiefsymmetrischer Matrizen sind *rein imaginär* (siehe Anhang A.2).

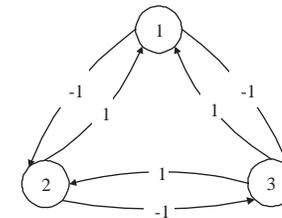
Die beiden Beispiele für symmetrische Verknüpfungen werden nun im schiefsymmetrischen Fall betrachtet.

Beispiel 3 (Die Netz-Struktur).

- Verknüpfungsmatrix für n Knoten, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Graph eines 3-Knoten-Systems:



- Eigenwerte von $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $n = 2, 3, 4, 5$:
 - $n = 2$: $\lambda_{1,2} = \pm j$
 - $n = 3$: $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{3}$ $\lambda_3 = 0$
 - $n = 4$: $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\lambda_{3,4} = \pm j\sqrt{3+2\sqrt{2}}$
 - $n = 5$: $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ $\lambda_{3,4} = \pm j\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ $\lambda_5 = 0$
 - $n = 6$: $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ $\lambda_{3,4} = \pm j\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ $\lambda_{5,6} = \pm j$

Beispiel 4 (Die Stern-Struktur).

- Verknüpfungsmatrix für n Knoten, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Graph eines 5-Knoten-Systems:
Der Graph entspricht dem symmetrischen Fall, wobei alle Verbindungen, die von Knoten 1 wegführen, „negativ“ sind.
- Eigenwerte von $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{n-1}, \quad \lambda_{3,\dots,n} = 0 \tag{3.12}$$

(Beweis im Anhang A.2)

Schiefsymmetrische, reelle Verknüpfungsmatrizen ($C = -C^T \in \mathbb{R}$) besitzen noch eine weitere interessante Eigenschaft. Mit den Gesetzmäßigkeiten

- $\lambda(-C) = -\lambda(C)$,
- $\text{Re}(\lambda(C)) = 0$ und
- $\exists \lambda(C) = s \iff \exists \lambda(C) = \bar{s}$

ergibt sich folgende Aussage:

Lemma 3.1.

Betrachtet wird das Netzwerk (3.8) mit $\tau = \text{const}$. Ist die Verknüpfungsmatrix C eine schiefsymmetrische, reelle Matrix, dann besitzen die Matrizen C und $-C$ die selben Eigenwerte. Damit ist das Stabilitätsverhalten der beiden Graphen C und $-C$ für gleiche Parameter a, b identisch, d.h.

$$S(a, b, C) = S(a, b, -C)$$

mit $a, b, c_{ij} \in \mathbb{R}$ und $C = -C^T$.

Mit Gleichung (3.8) lässt sich dieses Ergebnis noch auf andere Weise interpretieren. Es ist

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b(-C)x(t - \tau) = ax(t) + (-b)Cx(t - \tau)$$

und daraus folgt:

Satz 3.1.

Betrachtet wird das Netzwerk (3.8) mit $\tau = \text{const}$. Ist die Verknüpfungsmatrix C eine schiefsymmetrische, reelle Matrix, dann gilt

$$S(a, b, -C) = S(a, -b, C) = S(a, b, C)$$

mit $a, b, c_{ij} \in \mathbb{R}$ und $C = -C^T$. Das Stabilitätsverhalten für b und $-b$ ist also gleich.

Für die Stabilitätsuntersuchungen in Kapitel 4 und 5 ist es ausreichend $b < 0$ zu betrachten.

3.5.3 Die Kreis-Struktur

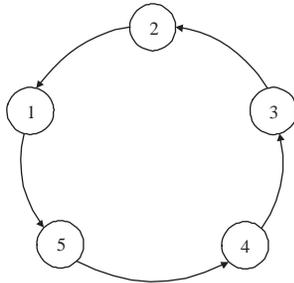
Ein weiteres mögliches Verknüpfungsmuster ist die Verschaltung aller Knoten in einem Kreis. Die Verknüpfungsmatrix der Kreis-Struktur ist weder symmetrisch, noch schiefsymmetrisch. Aus diesem Grund wird das Beispiel hier gesondert angeführt.

Beispiel 5 (Die Kreis-Struktur).

- Verknüpfungsmatrix für n Knoten, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{pmatrix}$$

- Graph eines 5-Knoten-Systems:



- Eigenwerte von $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

Die Eigenwerte lassen sich aus der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^n = 1 \tag{3.13}$$

bestimmen (Beweis im Anhang A.3). Die Eigenwerte entsprechen damit den komplexen Einheitswurzeln.

3.6 Knotennummerierung

Zwei Verknüpfungsmatrizen C_1 und C_2 mit $C_1 \neq C_2$ können den gleichen Graphen abbilden (Abbildung 3.5), d.h. die gleichen Stabilitätsbereiche $\mathcal{S}(a, b, C_1) = \mathcal{S}(a, b, C_2)$ aufweisen.



$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 3.5: Änderung der Knotennummerierung

Satz 3.2.

Gegeben seien zwei Verknüpfungsmatrizen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Existiert eine Permutationsmatrix P , so dass

$$P^T C_1 P = C_2,$$

dann ist

$$\mathcal{S}(a, b, C_1) = \mathcal{S}(a, b, C_2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Beweis:

Eine Permutationsmatrix enthält in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 und sonst Nullen. Durch die Multiplikation $P^T C_1 P$ wird nur die *Knotennummerierung* geändert. Der Graph und das zugehörige Stabilitätsverhalten bleibt gleich. □

Beispiel 6 (Anwendung auf die Netz-Struktur).

Mit der Permutationsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wird die Verknüpfungsmatrix C aus Beispiel 3 zu

$$P^T C P = -C.$$

Durch Änderung der Knotennummerierung lässt sich C in $-C$ überführen. Für das Stabilitätsverhalten bedeutet das

$$S(a, b, -C) = S(a, -b, C) = S(a, b, C).$$

Das heißt, das Stabilitätsverhalten der beiden Graphen C und $-C$ ist für gleiche Parameter a, b identisch. Ebenso ist bei gegebener Verknüpfungsmatrix C das Stabilitätsverhalten für b und $-b$ gleich (vergleiche Satz 3.1).

Mit Hilfe von geeignet gewählten Permutationsmatrizen P_i können verschiedene Verknüpfungsstrukturen C_i ineinander überführt werden. Wurde das Stabilitätsverhalten einer Verknüpfungsmatrix C_1 untersucht, so können anschließend Aussagen über das Stabilitätsverhalten *aller* Graphen $C_i = P_i^T C_1 P_i$ gemacht werden.

3.7 Skalierung der Verknüpfungsmatrix

Die hier betrachteten Netze sind aus gleichartigen Knoten aufgebaut. Um zu erreichen, dass alle Knoten – trotz unterschiedlicher Anzahl an Verknüpfungen – „gleich“ belastet werden, werden die Eingänge u_i skaliert. Die Idee der Skalierung ist, dass für jeden Knoten der Betrag des Eingangs in der selben Größenordnung liegt. Für den Eingang

$$u_i(t) = \sum_{j \neq i} c_{ji} x_j(t - \tau) \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

eines Knotens i wird deshalb

$$\sum_{j \neq i} |c_{ji}| = 1$$

gefordert. Der Eingang u_i wird „normiert“. Daraus ergeben sich die skalierten Verknüpfungsmatrizen C_S .

In Beispiel 1 wird die $n \times n$ -Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad C_S = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Skalierung für die Verknüpfungsmatrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in Beispiel 4 ist

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad C_S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend lassen sich auch andere Verknüpfungsstrukturen skalieren.

Die Eigenwerte der skalierten Verknüpfungsmatrizen aus den Beispielen in Kapitel 3.5 sind in Tabelle 3.1 dargestellt. Die Beweise zu Beispiel 2 und 4 können im Anhang A.1 bzw. A.2 nachgelesen werden.

Der Unterschied im Stabilitätsverhalten zwischen skalierten und unskalierten Verknüpfungsmatrizen wird in Kapitel 4.4.4 deutlich.

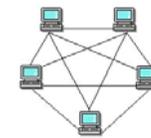
Bsp	$\lambda(C)$	$\lambda(C_S)$
1	$\lambda_1 = n - 1$ $\lambda_{2,\dots,n} = -1$	$\lambda_1 = 1$ $\lambda_{2,\dots,n} = \frac{-1}{n-1}$
2	$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{n-1}$ $\lambda_{3,\dots,n} = 0$	$\lambda_{1,2} = \pm 1$ $\lambda_{3,\dots,n} = 0$
3	$\lambda(C)$	$\lambda(C_S) = \frac{1}{n-1} \lambda(C)$
4	$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{n-1}$ $\lambda_{3,\dots,n} = 0$	$\lambda_{1,2} = \pm j$ $\lambda_{3,\dots,n} = 0$
5	$\lambda^n = 1$	—

Tabelle 3.1: Eigenwerte der Beispielverknüpfungen

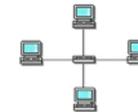
3.8 Anwendungsbeispiel: Netzwerktopologie

Topologie bezeichnet bei einem Computernetz die Struktur der Verbindungen mehrerer Computer untereinander. Dies soll einen gemeinsamen Datenaustausch gewährleisten. Die Topologie eines Netzes ist zum Beispiel entscheidend für seine Ausfallsicherheit.

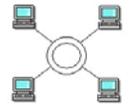
Die in Kapitel 3.5 gewählten Verknüpfungsstrukturen entsprechen bekannten Topologien in der Vernetzung von Computern (Abbildung 3.6).



Netz-Struktur:
selten



Stern-Struktur:
Telefonnetz, Fast Ethernet, ATM



Kreis-Struktur:
FDDI, Token Ring

Abbildung 3.6: Netzwerk-Topologien

Kapitel 4

Stabilität von Systemen mit konstanter Totzeit im Frequenzbereich

In diesem Kapitel wird die Stabilität von Netzwerken im Frequenzbereich untersucht. Die verschiedenen Stabilitätskriterien werden bezüglich ihrer Aussagekraft für vernetzte Systeme mit konstanter Totzeit verglichen. Für das $n \times n$ -System (3.8) ergeben sich allgemeine Stabilitätsaussagen in Abhängigkeit der Parameter a , b , C und τ .

Am Anfang steht eine kurze Einführung (Kapitel 4.1), die einen Überblick über die Eigenschaften der verschiedenen Stabilitätskriterien im Frequenzbereich gibt. In Kapitel 4.2 wird die allgemeine Vorgehensweise erläutert, die allen Kriterien zugrunde liegt. Im Anschluss werden die klassischen Stabilitätstests (Kapitel 4.3), der Frequency-Sweeping-Test (Kapitel 4.4) und der Test über konstante Matrizen (Kapitel 4.5) auf ihre Anwendbarkeit auf Netzwerke (3.8) untersucht und die Ergebnisse miteinander verglichen (Kapitel 4.6).

4.1 Einführung und Übersicht

Der Ausgangspunkt für alle Stabilitätstests im Frequenzbereich ist das Theorem 2.1 (Kapitel 2.4) für lineare, zeitinvariante Systeme. Die Stabilität

eines Systems wird hier über die Nullstellen des charakteristischen Quasipolynoms bestimmt. Die Grundidee der verschiedenen Stabilitätstests ist folgende: Es wird angenommen, dass das System für die Totzeit $\tau = 0$ stabil ist. Dann wird die Totzeit so lange erhöht, bis zum ersten Mal Pole über die imaginäre Achse wandern und das System damit instabil wird. Die Voraussetzung für diese Vorgehensweise ist die Stetigkeit des Stabilitätsindex $\alpha_0(\tau)$ bezüglich τ . Mit den Kriterien im Frequenzbereich erhält man notwendige und hinreichende Bedingungen für totzeitabhängige und totzeitunabhängige Stabilität.

Im Folgenden werden zunächst die klassischen Stabilitätstests vorgestellt. Die Betrachtung dieser Tests verdeutlicht die allgemeine Vorgehensweise bei der Stabilitätsuntersuchung von Totzeit-Systemen im Frequenzbereich. Desweiteren lassen sich mit diesen Tests parameterabhängige Stabilitätsaussagen für das 2×2 -System formulieren. Das Stabilitätsverhalten dieses einfachen Systems zeigt bereits viele Eigenschaften, die später bei der Analyse von $n \times n$ -Netzwerken ebenfalls zu beobachten sind. Die Nachteile bei der numerischen Umsetzung der klassischen Stabilitätstests und bei der Untersuchung größerer Systeme werden in den beiden folgenden Stabilitätstests durch eine andere Art der Berechnung der „Übergangs“-Frequenzen behoben. Der Frequency-Sweeping-Test bestimmt die Eigenwerte einer frequenzabhängigen Matrix, um die Stabilität eines Systems zu untersuchen. Dieser Test ist sehr gut für die Herleitung allgemeiner Stabilitätsaussagen von $n \times n$ -Systemen geeignet. Die Ergebnisse ermöglichen parameterabhängige Bedingungen für die in Kapitel 3.5 vorgestellten Beispielverknüpfungen. Der Test über konstante Matrizen liefert Stabilitätskriterien, die gut numerisch berechnet werden können.

Abschließend werden die Tests bezüglich ihrer Erweiterbarkeit auf größere Systeme, der Möglichkeit allgemeine Stabilitätsaussagen zu erhalten und der numerischen Implementierbarkeit verglichen.

4.2 Allgemeine Vorgehensweise

Um die Stabilität von Totzeit-Systemen im Frequenzbereich zu untersuchen, werden die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (2.7) be-

trachtet (Kapitel 2.4). Das System ist asymptotisch stabil, wenn alle Nullstellen in der offenen linken Halbebene \mathbb{C}_- liegen (Theorem 2.1).

Bemerkung 4.1.

In den weiteren Untersuchungen wird das Netzwerk-Modell (3.8) mit nur einer Totzeit τ und dem charakteristischen Polynom

$$p(s, e^{-\tau s}) = \det(sI - aI - bCe^{-\tau s}) = \sum_{k=0}^q p_k(s)e^{-k\tau s} \quad (4.1)$$

betrachtet. Alle Stabilitätskriterien lassen sich aber auch auf Systeme mit mehreren kommensurablen Totzeiten erweitern.

Bei Untersuchungen im Frequenzbereich geht man im Allgemeinen folgendermaßen vor:

- Es wird angenommen, dass das System für $\tau = 0$ stabil ist.
- Die Totzeit τ wird nun von null solange erhöht, bis zum ersten Mal Pole auf der imaginären Achse liegen.
- Aufgrund der Stetigkeit des Stabilitätsexponenten $\alpha_0(\tau)$ (Theorem 2.1) bezüglich τ erhält man so die kleinste Totzeit $\bar{\tau}$, für die das System instabil wird

$$\bar{\tau} := \min \{ \tau \geq 0 \mid p(j\omega, e^{-j\tau\omega}) = 0 \text{ für } \omega \in \mathbb{R} \}. \quad (4.2)$$

Das System ist damit stabil für $\tau \in [0, \bar{\tau})$. Ist $\bar{\tau} = \infty$, dann ist das System totzeitunabhängig stabil.

Die Lösungspaare $\{(\omega_k, \tau_k) \mid p(j\omega_k, e^{-j\tau_k\omega_k}) = 0\}$ besitzen wichtige Eigenschaften [Gu u. a. 2003], [Olgac und Sipahi 2002]:

- Alle komplexen Nullstellen von (4.1) treten in *konjugiert komplexen Paaren* auf, da (4.1) ein Quasipolynom mit rein *reellen* Koeffizienten ist. Es ist somit ausreichend

$$\omega_k > 0 \quad (4.3)$$

zu betrachten.

- Es gibt nur *endlich* viele „Übergangs“-Frequenzen $\omega_k, k = 1, \dots, m$, für die das charakteristische Quasipolynom null wird.
- Zu jedem ω_k gehören *unendlich* viele $\tau_{k,l}$ mit

$$\tau_{k,l} = \tau_k + \frac{2\pi l}{\omega_k} \geq 0, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (4.4)$$

- Die Richtung, mit der das Polpaar über die imaginäre Achse wandert, von \mathbb{C}_- nach \mathbb{C}_+ bzw. von \mathbb{C}_+ nach \mathbb{C}_- , ist für ein ω_k unabhängig von der zugehörigen Totzeit $\tau_{k,l}$ immer die selbe.

Bemerkung 4.2.

Die Frequenz $\omega = 0$ ist keine mögliche „Übergangs“-Frequenz. Aus der Annahme, dass das System für $\tau = 0$ stabil ist, folgt, dass $\omega = 0$ keine Lösung des charakteristischen Polynoms ist:

$$p(j\omega, 1) \neq 0 \quad \forall \omega \Rightarrow p(0, 1) \neq 0.$$

Bemerkung 4.3.

In dieser Arbeit wird ausschließlich das Stabilitätsintervall $[0, \bar{\tau})$ betrachtet. Ebenso können aber auch Intervalle (τ_k, τ_{k+1}) berechnet werden, für die das System stabil (oder instabil) ist. Ausgehend von der Totzeit τ^* , für die das System stabil (bzw. instabil) ist, erhöht und erniedrigt man die Totzeit so lange, bis Pole auf der imaginären Achse liegen.

4.3 Klassische Stabilitätstests

4.3.1 Idee

Um Aussagen über die Stabilität im Frequenzbereich machen zu können, müssen die Paare $\{(\omega_k, \tau_k) \mid p(j\omega_k, e^{-j\tau_k\omega_k}) = 0\}$ berechnet werden. Bei den klassischen Stabilitätstests wird das charakteristische Quasipolynom (4.1) als Polynom in *zwei* Variablen $p(s, z)$ aufgefasst, wobei nur Lösungen $s \in \partial\mathbb{C}_-$ und $z = e^{-\tau s} \in \partial\mathbb{D}$ zulässige Lösungen des ursprünglichen Problems sind.

Um die Gleichung $p(s, z) = 0$ zu lösen, gibt es im Wesentlichen zwei verschiedene Ansätze:

Eliminieren einer Variablen:

Das Stabilitätsproblem wird auf ein Problem unabhängig von z bzw. unabhängig von der Totzeit τ reduziert. Man erhält ein Polynom, das nur noch von einer Variablen abhängt.

Die Definition eines konjugierten Polynoms [Gu u. a. 2003] und die direkte Methode [Gu u. a. 2003] sind Beispiele für diese Vorgehensweise.

Transformation einer Variablen:

Durch eine Transformation der Form $s = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ oder $z = \frac{1-sT}{1+sT}$, $T > 0$ erhält man Gleichungstypen, die besser analytisch oder numerisch gelöst werden können. Die Stabilitätsanalyse wird dadurch vereinfacht.

Der 2-D-Stabilitätstest [Gu u. a. 2003],[Bistritz 2005] und die Pseudo-Delay-Methode [Gu u. a. 2003],[Olgac und Sipahi 2002] sind Beispiele für die Transformation einer Variablen.

4.3.2 Stabilitätsaussagen für das 2x2-System

In diesem Abschnitt wird die Stabilität des 2x2-Systems aus Kapitel 3.2 mit Hilfe einiger der oben genannten Methoden untersucht. Dabei werden die Möglichkeiten und Grenzen der klassischen Stabilitätstests aufgezeigt.

Untersucht wird die Stabilität des Systems (3.7) mit konstanter Totzeit

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t - \tau), \quad \tau = \text{const.}$$

in Abhängigkeit von den Parametern a , b und τ . Das charakteristische Quasipolynom lautet

$$p(s) = \det \left(sI - aI - b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} e^{-\tau s} \right) = (s-a)^2 + b^2 e^{-2\tau s} \quad (4.5)$$

bzw.

$$p(s, z) = s^2 - 2as + a^2 + b^2 z^2. \quad (4.6)$$

Es wird angenommen, dass das System für $\tau = 0$ stabil ist, d.h.

$$\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}_M \in \mathbb{C}_- \quad \Leftrightarrow \quad \det(M) > 0, \quad \text{Sp}(M) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 > 0, \quad \boxed{a < 0}. \quad (4.7)$$

Für die weitere Analyse des Systems ist nur der Parameterbereich $a < 0$ interessant.

a. Definition eines konjugierten Polynoms

Zu Gleichung (4.1) wird ein konjugiertes Polynom $\bar{p}(s, z)$ definiert [Gu u. a. 2003]. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft des charakteristischen Polynoms

$$p(j\omega, e^{-j\tau\omega}) = 0 \Leftrightarrow p(-j\omega, e^{-j\tau(-\omega)}) = 0 \quad (4.8)$$

ist für $(s^*, z^*) \in \partial\mathbb{C}_- \times \partial\mathbb{D}$

$$\bar{p}(s^*, z^*) := (z^*)^q p(-s^*, (z^*)^{-1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(s^*, z^*) = 0.$$

Für das 2x2-System ergeben sich die beiden Gleichungen

$$p(s, z) = s^2 - 2as + a^2 + b^2 z^2 = 0 \quad (4.9)$$

$$\bar{p}(s, z) = z^2 s^2 + 2as z^2 + a^2 z^2 + b^2 = 0. \quad (4.10)$$

Gleichung (4.9) kann nach z^2 aufgelöst und in Gleichung (4.10) eingesetzt werden. Man erhält

$$z^2 = \frac{-s^2 + 2as - a^2}{b^2} \quad (4.11)$$

und s in Abhängigkeit von a, b

$$s = \pm \sqrt{a^2 \pm b^2}. \quad (4.12)$$

Es müssen die Fälle $a^2 > b^2$, $a^2 = b^2$ und $a^2 < b^2$ unterschieden werden.

Für $a^2 > b^2$ ist $s \notin \partial\mathbb{C}_-$ (Kapitel 4.3.1), d.h. keine Pole wandern über die imaginäre Achse. Für alle $\tau \geq 0$ liegen die Pole in der linken

Halbebene. Das System ist totzeitunabhängig stabil.

Für $a^2 = b^2$ ist $s = 0$. Mit Gleichung (4.11) ergibt sich $z = -1 \neq e^{-\tau s}|_{s=0}$, d.h. $s = 0$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung $p(s, z)$ (Bemerkung 4.2).

Für $a^2 < b^2$ erhält man ein $s = j\omega \in \partial\mathbb{C}_-$ mit $\omega > 0$:

$$s^* = j\sqrt{b^2 - a^2}j. \quad (4.13)$$

Wird s^* in Gleichung (4.11) eingesetzt

$$z^2 = \frac{b^2 - 2a^2 + 2a\sqrt{b^2 - a^2}j}{b^2}, \quad (4.14)$$

dann ergibt sich für alle a, b : $|z^2(s^*)| = 1$. Dies führt zu folgender Aussage:

$$\forall a, b: a < 0, a^2 < b^2 \exists (s^*, z^*) \in \partial\mathbb{C}_- \times \partial\mathbb{D}: p(s^*, z^*) = 0. \quad (4.15)$$

Zusammengefasst heißt das:

Für $\boxed{a^2 \geq b^2}$ ist das System *totzeitunabhängig stabil*.

Für $\boxed{a^2 < b^2}$ ist das System *totzeitabhängig stabil*.

Für den totzeitabhängigen Parameterbereich kann mit $s^* = j\omega = \sqrt{b^2 - a^2}j$ die Totzeit $\bar{\tau}$ bestimmt werden:

$$z \stackrel{!}{=} e^{-j\omega\tau} = e^{-j\sqrt{b^2 - a^2}\tau} \quad \text{bzw.} \quad \arg(z) = -\sqrt{b^2 - a^2}\tau. \quad (4.16)$$

Aus Gleichung (4.14) erhält man unter Berücksichtigung, dass a negativ ist,

$$\arg(z^2) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2a\sqrt{b^2 - a^2}}{b^2 - 2a^2}\right) & \text{für } b^2 > 2a^2, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } b^2 = 2a^2, \\ \arctan\left(\frac{2a\sqrt{b^2 - a^2}}{b^2 - 2a^2}\right) - \pi & \text{für } b^2 < 2a^2. \end{cases} \quad (4.17)$$

Für $\arg(z)$ ergeben sich aus (4.17) die beiden Lösungen

$$\arg(z_1) = \frac{1}{2}\arg(z^2) \quad \text{und} \quad \arg(z_2) = \frac{1}{2}\arg(z^2) + \pi. \quad (4.18)$$

Zu den Winkeln können jeweils Vielfache von 2π addiert werden. Der Übersichtlichkeit halber wurde aber darauf verzichtet, dies explizit anzugeben. Um $\bar{\tau} \geq 0$ aus Gleichung (4.16) zu erhalten, wird der betragsmäßig kleinste, negative Winkel $\overline{\arg}(z)$ gesucht. Für die drei Fälle ist das

$$\overline{\arg}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2a\sqrt{b^2 - a^2}}{b^2 - 2a^2}\right) & \text{für } b^2 > 2a^2, \\ -\frac{\pi}{4} & \text{für } b^2 = 2a^2, \\ \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2a\sqrt{b^2 - a^2}}{b^2 - 2a^2}\right) - \frac{\pi}{2} & \text{für } b^2 < 2a^2. \end{cases}$$

Mit Hilfe der beiden Identitäten [Bronstein u. a. 2000]

$$\arctan(x) = \begin{cases} -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) & \text{für } x \leq 0 \\ \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

und

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x) \quad (4.20)$$

können die drei Fälle zusammengefasst werden zu

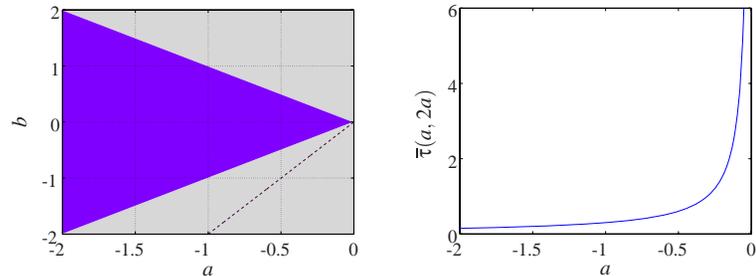
$$\overline{\arg}(z) = -\frac{1}{2}\arccos\left(1 - \frac{2a^2}{b^2}\right). \quad (4.21)$$

Gleichung (4.16) liefert

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - a^2}}\arccos\left(1 - \frac{2a^2}{b^2}\right)}. \quad (4.22)$$

Das System ist totzeitunabhängig stabil für Werte $|a| \geq |b|$. Außerdem gilt: $\bar{\tau} \rightarrow \infty$ wenn $a - b \rightarrow 0$ für $|a| < |b|$, $a < 0$.

Das Stabilitätsverhalten des 2×2 -Systems lässt sich *graphisch* veranschaulichen. Abbildung 4.1(a) zeigt, für welche Parameterpaare (a, b) das System totzeitunabhängig (dunkel) bzw. totzeitabhängig (hell) stabil ist. Die Totzeit $\bar{\tau}(a, b)$ entlang der gestrichelten Geraden $(a, b) = (a, 2a)$ ist



(a) Stabilitätsbereiche: totzeitunabhängig stabil (dunkel), totzeitabhängig stabil (hell) (b) $\bar{\tau}$ entlang der gestrichelten Geraden aus Abbildung 4.1(a)

Abbildung 4.1: Stabilität des 2x2-Systems

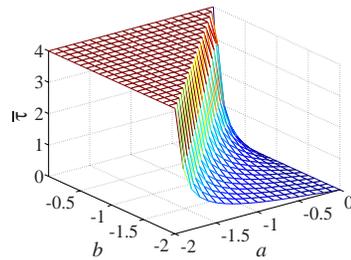


Abbildung 4.2: Stabilitätsverhalten des 2x2-Systems

in Abbildung 4.1(b) aufgezeichnet. In Abbildung 4.2 ist $\bar{\tau}$ über dem Parameterbereich (a, b) dargestellt. Es ist ausreichend $b < 0$ zu betrachten (Satz 3.1). Um eine übersichtliche und anschauliche Abbildung zu erhalten, wurden alle Werte $\bar{\tau} \geq 4$ als $\bar{\tau} = 4$ dargestellt. Das heißt, auch der totzeitunabhängig stabile Bereich mit $\bar{\tau} = \infty$ ist in der Graphik durch $\bar{\tau} = 4$ dargestellt.

b. Direkte Methode

Diese Methode beruht auf der Eliminierung von $e^{j\omega\tau}$ aus der charakteristischen Gleichung $p(j\omega)$, [Gu u. a. 2003].

Im 2x2-Fall folgt aus der charakteristischen Gleichung (4.5) mit $|e^{-2\tau j\omega}| = 1$

$$p(j\omega) = (j\omega - a)^2 + b^2 e^{-2\tau j\omega} = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{(j\omega - a)^2}{b^2} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = \pm b^2 - a^2.$$

Diese Gleichung ist unabhängig von τ . Daraus erhält man die „Übergangs“-Frequenzen ω_k . Es ist offensichtlich, dass für $a^2 \geq b^2$ keine Lösungen für $\omega_k > 0$ existieren, d.h. das System ist für diese Parameterwerte (a, b) totzeitunabhängig stabil. Die Stabilitätsbereiche und die Übergangsfrequenz

$$\omega = \sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{für } a^2 < b^2 \tag{4.23}$$

entsprechen denen, die mit Hilfe der Definition des konjugierten Polynoms erzielt wurden.

Die Totzeit $\bar{\tau}$ kann aus

$$\frac{(j\omega - a)^2}{-b^2} = e^{-2\tau j\omega} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{(j\omega - a)^2}{-b^2}\right) = -2\tau\omega$$

mit dem Ergebnis (4.23) berechnet werden.

c. Pseudo-Delay-Methode

Die Idee ist, mit Hilfe einer bilinearen Transformation [Gu u. a. 2003]

$$z = \frac{1 - sT}{1 + sT}, \quad T > 0$$

ein neues Polynom

$$c(T, s) := (1 + sT)^q p\left(s, \frac{1 - sT}{1 + sT}\right) \tag{4.24}$$

zu erhalten. Mit diesem Polynom wird anstelle von $p(s, z)$ die Stabilität des Systems untersucht. Die „Übergangs“-Frequenzen ω_k berechnet man in diesem Fall aus

$$c(T, j\omega_k) = 0, \quad 0 < T < \infty \quad \text{und} \quad p(j\omega_k, -1) = 0. \tag{4.25}$$

$c(T, s)$ ist ein Polynom in s , dessen Koeffizienten mit T parametrisiert sind.

Aus der Annahme, dass das System für $\tau = 0$ stabil ist, folgt, dass das Polynom $p(s, 1) = c(0, s) = 0$ nur Pole in der linken Halbebene besitzt. Für Systeme, die *totzeitunabhängig* stabil sind, bedeutet das, dass die Pole von $c(T, s)$ für alle Werte $0 < T < \infty$ in der linken Halbebene liegen. Das Polynom $c(T, s)$ kann also mit den bekannten Stabilitätstests wie dem Hurwitz-Stabilitätskriterium oder dem Wurzelortskurven-Verfahren untersucht werden.

Für das einfache 2×2 -System (3.7) werden die Parameterwerte (a, b) gesucht, für die das System *totzeitunabhängig* stabil ist. Die Gleichungen (4.25) dürfen also keine Nullstellen auf der imaginären Achse besitzen. Für das charakteristische Polynom (4.6) mit $z = -1$

$$p(s, -1) = s^2 - 2as + a^2 + b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_{1,2} = a \pm |b|j$$

wird dies für $a \neq 0$ erreicht. Die zweite Gleichung

$$c(T, s) = T^2 s^4 + (2T - 2aT^2)s^3 + (a^2 T^2 + b^2 T^2 + 1)s^2 + (2Ta^2 - 2a - 2Tb^2 - 4aT)s + a^2 + b^2 = 0$$

kann mit dem Hurwitz-Kriterium untersucht werden. Dabei erhält man Ungleichungen wie

$$2T(1 - aT) > 0, \quad 0 < T < \infty \quad \Rightarrow \quad a \leq 0$$

oder

$$T[-2a(a^2 + b^2)T^3 + 4(b^2 + a)T^2 + 2] > 0, \quad 0 < T < \infty \quad (4.26)$$

und daraus Bedingungen für (a, b) . Für Polynome höherer Ordnung (4.26) ist es nicht einfach Bedingungen für (a, b) herzuleiten.

Bemerkung 4.4.

Ändert man die Verknüpfungsmatrix des 2×2 -Systems zu

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dann sind die Bedingungen für Stabilität bei $\tau = 0$

$$a < 0 \quad \text{und} \quad a^2 > b^2.$$

Für ω ergibt sich beispielsweise mit der direkten Methode das gleiche Ergebnis (4.23) wie für das oben betrachtete 2×2 -System (3.7) mit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das System ist damit für $\boxed{a^2 > b^2}$ *totzeitunabhängig stabil* und besitzt *keinen Bereich*, der *totzeitabhängig stabil* ist.

4.3.3 Zusammenfassung

Im letzten Abschnitt wurde das 2×2 -System (3.7) mit verschiedenen klassischen Ansätzen analysiert. Die Grenzen der klassischen Stabilitätstests werden offensichtlich, wenn man Systeme mit mehr als zwei Knoten betrachtet. Für die Bewertung der verschiedenen Methoden wird beispielhaft folgendes 3×3 -System betrachtet

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x(t - \tau), \quad \tau = \text{const.}$$

mit

$$p(s) = (s - a)^3 + 2b^3 e^{-3\tau s} + 3b^2 (s - a) e^{-2\tau s}. \quad (4.27)$$

Definition eines konjugierten Polynoms

Das Eliminieren einer Variablen aus den beiden Gleichungen $p(s, z)$, $\bar{p}(s, z)$ wird für große Netzwerke zunehmend schwieriger. Dies ist schon am Quasipolynom des 3-Knoten-Systems (4.27) erkennbar ist.

Direkte Methode

Die einfache Vorgehensweise wie im 2x2-Fall ist bei Systemen mit mehr Knoten nicht mehr möglich, da im charakteristischen Quasipolynom (4.1) weitere Summanden mit $e^{-k\tau s}$, $k \in \mathbb{N}$ auftreten (vergleiche (4.27)). Das Stabilitätsverhalten dieser Systeme muss iterativ bestimmt werden [Gu u. a. 2003]. Allgemeine, kompakte Stabilitätsaussagen für parameterabhängige Quasipolynome sind damit allerdings nicht möglich.

Pseudo-Delay-Methode

Schon die Untersuchung des 2x2-Falls ist schwierig. Das Hauptproblem ist, aus den Ungleichungen des Hurwitz-Kriteriums Bedingungen für die Parameter (a, b) zu gewinnen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass mit den klassischen Stabilitätstests *parameterabhängige* Stabilitätsaussagen für Netzwerke nur sehr eingeschränkt möglich sind. Das Stabilitätsverhalten des 2x2-Systems konnte mit diesen Methoden untersucht werden. Für Netzwerke mit einer größeren Anzahl an Knoten treten Probleme auf. Entweder ist es schwierig, eine der beiden Variablen s bzw. z zu eliminieren, oder die Untersuchung der neuen Polynome, die durch Variablentransformation entstehen, bereitet Schwierigkeiten. Die Lösungen der neuen Polynome werden meist numerisch berechnet. Die verwendeten Algorithmen lassen keine allgemeinen Aussagen in Abhängigkeit der System-Parameter zu.

4.4 Frequency-Sweeping-Test

4.4.1 Idee

Die Stabilität eines Totzeit-Systems wird über die Eigenwerte einer frequenzabhängigen Matrix untersucht. Die Bedingungen für totzeitunabhängige Stabilität liefert das folgende Theorem.

Theorem 4.1. [Gu u. a. 2003]

Das System

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) \quad \tau \geq 0 \quad (4.28)$$

ist genau dann totzeitunabhängig stabil, wenn

- (i) A_0 stabil ist,
- (ii) $A_0 + A_1$ stabil ist und
- (iii) $\rho\left((j\omega I - A_0)^{-1} A_1\right) < 1, \quad \forall \omega > 0.$

Der Spektralradius $\rho(\cdot)$ ist definiert als $\rho(M) = \max_i |\lambda_i(M)|$.

Die Punkte (i) und (ii) garantieren die Stabilität für $\tau = \infty$ bzw. $\tau = 0$.

Desweiteren kann mit Hilfe des Frequency-Sweeping-Tests für totzeitabhängig stabile Systeme der Bereich $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ bestimmt werden, in dem das System stabil ist. Das Theorem aus [Gu u. a. 2003] wurde für die hier betrachteten Netzwerke (3.8) angepasst (Bemerkung 4.5).

Theorem 4.2.

Das System (4.28) sei stabil für $\tau = 0$, d.h. $A_0 + A_1$ sei stabil und die Matrix $(j\omega I - A_0)$ mit $\omega \in (0, \infty)$ sei invertierbar.

Mit $\theta = \omega\tau$ wird

$$\bar{\tau}_i := \begin{cases} \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\theta_k^i}{\omega_k^i} & \text{wenn } \lambda_i\left((j\omega_k^i I - A_0)^{-1} A_1\right) = e^{j\theta_k^i} \\ & \text{für } \omega_k^i \in (0, \infty), \theta_k^i \in [0, 2\pi] \\ \infty & \text{wenn } \rho\left((j\omega I - A_0)^{-1} A_1\right) < 1, \\ & \forall \omega \in (0, \infty). \end{cases} \quad (4.29)$$

und

$$\bar{\tau} := \min_{1 \leq i \leq n} \bar{\tau}_i \quad (4.30)$$

definiert.

Das System (4.28) ist stabil für alle $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ und wird instabil für $\tau = \bar{\tau}$.

Bei der Berechnung von $\bar{\tau}$ bestimmt man zunächst die „Übergangs“-Frequenzen aus

$$\left| \lambda_i\left((j\omega_k^i I - A_0)^{-1} A_1\right) \right| = 1 \quad (4.31)$$

und damit dann $\bar{\tau}_i$ bzw. $\bar{\tau}$.

Bemerkung 4.5.

Bei dem betrachteten Netzwerk-Modell (3.8) ist $A_0 = aI$, $a \in \mathbb{R}$. A_0 hat keine Eigenwerte $s = j\omega$, $\omega \in (0, \infty)$ auf der imaginären Achse. Die Matrix $(j\omega I - A_0)$ in Theorem 4.2 ist also invertierbar. Für allgemeine Matrizen A_0 muss statt Berechnung der Eigenwerte

$$\lambda \left((j\omega I - A_0)^{-1} A_1 \right)$$

ein verallgemeinertes Eigenwertproblem gelöst werden [Gu u. a. 2003].

Aufgrund der einfachen Stabilitätsanalyse über die Eigenwerte erhält man mit dieser Methode allgemeine Aussagen für Netzwerke mit n Knoten. Im nächsten Abschnitt werden aus den Theoremen 4.1 und 4.2 Stabilitätsbedingungen für das Netzwerkmodell (3.8) in Abhängigkeit von (a, b) hergeleitet. Nach der Untersuchung des 2-Knoten-Systems im vorigen Kapitel zeigt der folgende Abschnitt, dass sich für Netzwerke mit n Knoten sehr ähnliche Stabilitätsbedingungen ergeben.

4.4.2 Stabilitätsaussagen für das $n \times n$ -System

Für das Netzwerk-Modell (3.8)

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bCx(t - \tau) \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

wird zunächst mit Theorem 4.1 der Parameterbereich (a, b) bestimmt, in dem das System *totzeitunabhängig* stabil ist. Die Bedingung (i) lautet für das Netzwerk

$$\operatorname{Re}[\lambda(A_0)] = \operatorname{Re}[\lambda(aI)] < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < 0. \quad (4.32)$$

Mit der Matrix $A_0 + A_1 = aI + bC$ ergibt sich für Bedingung (ii)

$$\operatorname{Re}[\lambda_i(aI + bC)] = \operatorname{Re}[a + b\lambda_i(C)] < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + b\operatorname{Re}[\lambda_i(C)] < 0. \quad (4.33)$$

Die Ungleichung in Bedingung (iii) ist äquivalent zu

$$\rho^2 \left((j\omega I - A_0)^{-1} A_1 \right) < 1, \quad \forall \omega > 0. \quad (4.34)$$

Für das $n \times n$ -System führt das auf

$$\begin{aligned} \rho^2 \left((j\omega - a)^{-1} bC \right) < 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{j\omega - a} \right|^2 b^2 \rho^2(C) < 1 \\ &\Leftrightarrow b^2 \rho^2(C) < a^2 + \omega^2, \quad \forall \omega > 0 \\ &\Leftrightarrow b^2 \rho^2(C) \leq a^2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die Bedingungen für das Netzwerk-Modell (4.32)-(4.35) können zusammengefasst werden:

Satz 4.1.

Das Netzwerk (3.8) ist genau dann *totzeitunabhängig stabil*, wenn

- (i) $a < 0$,
- (ii) $a + b\operatorname{Re}[\lambda_i(C)] < 0$ und
- (iii) $b^2 \rho^2(C) \leq a^2$.

Bemerkung 4.6.

Der Bereich, in dem ein Netzwerk (3.8) *totzeitunabhängig stabil* ist, liegt für alle Verknüpfungsstrukturen links der b -Achse und wird durch die beiden Geraden

$$b = \frac{1}{\rho(C)}a \quad \text{und} \quad b = -\frac{1}{\rho(C)}a$$

begrenzt (Satz 4.1 - Bedingung (i) und (iii)). Die Bedingung (ii) in Satz 4.1 ist weniger einschränkend. Nur im Fall

$$\rho(C) = |\lambda^*(C)| \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\lambda^*(C)) = 0$$

sorgt Bedingung (ii) dafür, dass Werte auf dem Rand des Stabilitätsbereiches – bestimmt aus (i) und (iii) – instabil sind. Das bedeutet, je größer der Spektralradius der Verknüpfungsmatrix $\rho(C)$ ist, desto flacher verlaufen die Geraden und desto kleiner wird der totzeitunabhängige Stabilitätsbereich. Der Bereich ist nur vom Spektralradius $\rho(C)$ abhängig. Abbildung 4.3 zeigt zwei Beispiele mit unterschiedlichen Werten für $\rho(C)$.

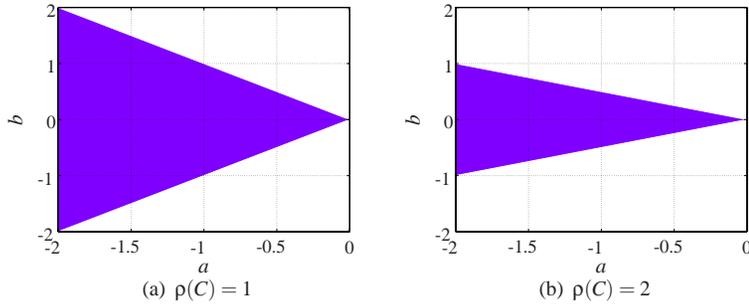


Abbildung 4.3: Totzeitunabhängiger Stabilitätsbereich (dunkel eingefärbt)

Der Bereich, in dem das Netzwerk (3.8) *totzeitabhängig stabil* ist, und die zu den Parameterwerten (a, b) gehörende Totzeit $\bar{\tau}$ kann aus Theorem 4.2 hergeleitet werden. Angenommen wird wieder, dass das System für $\tau = 0$ stabil ist, d.h.

$$a + b \operatorname{Re}[\lambda_i(C)] < 0. \quad (4.36)$$

Die „Übergangs“-Frequenzen $\omega_k > 0$ berechnen sich aus (4.31)

$$\begin{aligned} |\lambda_k((j\omega_k I - aI)^{-1} bC)| &= 1 \\ \left| \frac{b}{j\omega_k - a} \right|^2 |\lambda_k(C)|^2 &= 1 \\ \frac{b^2}{\omega_k^2 + a^2} |\lambda_k(C)|^2 &= 1 \end{aligned}$$

zu

$$\omega_k = \sqrt{b^2 |\lambda_k(C)|^2 - a^2}, \quad k = 1, \dots, n; \quad b^2 |\lambda_k(C)|^2 - a^2 > 0. \quad (4.37)$$

Für das Netzwerk (3.8) erhält man zu jedem Eigenwert λ_k genau ein ω_k .

Für jedes ω_k kann mit Gleichung (4.29) ein τ_k bestimmt werden

$$\begin{aligned} \arg[\lambda_k((j\omega_k - a)^{-1} bC)] &= \theta_k \\ \underbrace{\arg\left[\frac{b}{j\omega_k - a}\right] + \arg[\lambda_k(C)]}_{\in [0, 2\pi]} &= \tau_k \omega_k. \end{aligned}$$

Die weitere Herleitung ausgehend von dieser Gleichung kann im Anhang B.1 nachgelesen werden. Es ist eine Fallunterscheidung notwendig, die schließlich auf eine *geschlossene* Lösung für $\bar{\tau}$ führt

$$\bar{\tau} = \min_k \left\{ \frac{1}{\omega_k} \arccos \left(\frac{\omega_k \operatorname{Im}(\lambda_k(C)) - a \operatorname{Re}(\lambda_k(C))}{b |\lambda_k(C)|^2} \right) \right\}. \quad (4.38)$$

Die „Übergangs“-Frequenz ω_k berechnet sich nach Gleichung (4.37).

Mit den Ergebnissen (4.36)-(4.38) kann der folgende Satz formuliert werden:

Satz 4.2.

Das Netzwerk (3.8) ist für die Parameterwerte (a, b) genau dann *totzeitabhängig stabil*, wenn

- (i) $a + b \operatorname{Re}[\lambda_k(C)] < 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und
- (ii) $b^2 |\lambda_k(C)|^2 > a^2$ für mindestens ein $k \in \{1, \dots, n\}$.

Im *totzeitabhängigen* Parameterbereich (a, b) ist das System (3.8) stabil für alle $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ mit

$$\bar{\tau} = \min_k \left\{ \frac{1}{\omega_k} \arccos \left(\frac{\omega_k \operatorname{Im}(\lambda_k(C)) - a \operatorname{Re}(\lambda_k(C))}{b |\lambda_k(C)|^2} \right) \right\} \quad (4.39)$$

und

$$\omega_k = \sqrt{b^2 |\lambda_k(C)|^2 - a^2}. \quad (4.40)$$

Für $\tau = \bar{\tau}$ wird das System *instabil*.

Das Stabilitätsverhalten des Netzwerkes hängt direkt von der Verknüpfungsstruktur ab. Die Eigenwerte der Verknüpfungsmatrix bestimmen die Existenz und Größe der Bereiche, in denen das System totzeitabhängig bzw. totzeitunabhängig stabil ist. Auch die Totzeit $\bar{\tau}$ ist abhängig von den Eigenwerten der Verknüpfungsmatrix.

In Kapitel 4.4.4 und 4.4.5 werden anhand der Beispielverknüpfungen aus Kapitel 3.5 die Auswirkungen unterschiedlicher Verknüpfungen auf die Stabilität eines Netzwerkes untersucht. Außerdem wird gezeigt, welche Vorteile die Skalierung der Eingänge hat.

4.4.3 Vergleich mit Small-Gain-Theorem

In Kapitel 4.4.2 wurden Bedingungen für *totzeitunabhängige* Stabilität eines $n \times n$ -Systems aus dem Frequency-Sweeping-Test hergeleitet (Satz 4.1). Zu ähnlichen Stabilitätsaussagen führt das bekannte Small-Gain-Theorem.

Das Netzwerk (3.8) wird auf M- Δ -Struktur gebracht (Abbildung 4.4). Die Stabilität des Systems wird dann mittels strukturiertem singulären Wert untersucht. In Gleichung (3.8)

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bCx(t - \tau)$$

wird der zeitverzögerte Zustand $x(t - \tau)$ als Eingang u in das System $M(s) = (s - a)^{-1} bC$ interpretiert. Die Zeitverzögerung $\tau \in [0, \infty)$ stellt die Unsicherheit $\Delta(s) = e^{-\tau s} I$ dar.

Man beachte, dass Δ *nicht für alle s unsicher* ist, da $\Delta(0) = 1$ fest vorgegeben ist. Für alle anderen Frequenzen stellt $\Delta(j\omega)$ eine Unsicherheit dar, da im totzeitunabhängig stabilen Fall τ beliebig gewählt werden kann. Die Unsicherheit Δ hat in unserem Fall die Struktur

$$\Delta = \delta I, \quad \delta \in \mathbb{C}. \quad (4.41)$$

Es wird angenommen, dass M und Δ stabil sind. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$a < 0. \quad (4.42)$$

Unter dieser Annahme liefert das Theorem über robuste Stabilität von Systemen mit strukturierten Unsicherheiten

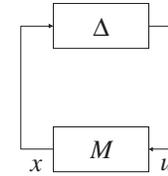


Abbildung 4.4: M- Δ -Struktur

[Skogestad und Postlethwaite 2005] folgende Stabilitätsaussage: Die M- Δ -Struktur ist genau dann für alle betrachteten Unsicherheiten X

$$X = \{\Delta_u : \Delta_u = \delta I, \delta \in \mathbb{C} \text{ und } \|\Delta_u\|_\infty \leq 1\} \quad (4.43)$$

stabil, wenn

$$\mu(M(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega. \quad (4.44)$$

Für die Unsicherheit (4.41) ist

$$\mu(M(j\omega)) = \rho(M(j\omega)).$$

Bedingung (4.44) lautet dann in unserem Fall

$$\begin{aligned} \rho\left((j\omega - a)^{-1} bC\right) < 1 &\stackrel{(4.35)}{\Leftrightarrow} b^2 \rho^2(C) < a^2 + \omega^2, \quad \forall \omega \\ &\Leftrightarrow b^2 \rho^2(C) < a^2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ein Vergleich der Gleichungen (4.42) und (4.45) mit den Bedingungen in Satz 4.1 zeigt, dass die *Stabilitätsbereiche mit Ausnahme der Ränder identisch sind*. Gleichung (4.45) schließt den Gleichheitsfall aus, d.h. die Ränder des Stabilitätsbereichs. In Satz 4.1 gibt es dagegen eine weitere Bedingung (ii), so dass in Ausnahmefällen Randpunkte tatsächlich nicht totzeitunabhängig stabil sind (Bemerkung 4.6).

Die Ergebnisse, die aus dem Frequency-Sweeping-Test hergeleitet wurden, sind notwendig und hinreichend, d.h. sie geben den exakten Stabilitätsbereich an. Die aus dem Theorem über robuste Stabilität gewonnenen Stabilitätsbedingungen sind für das betrachtete Netzwerk (3.8) nur hinreichend, da sie die Bedingung $\Delta(0) = 1$ außer Acht lassen.

Bemerkung 4.7.

Ein notwendiges und hinreichendes „Small-Gain-Theorem“ für den totzeitunabhängig stabilen Fall kann gewonnen werden, indem der Fall $\omega = 0$ getrennt betrachtet wird. Es wird

$$\mu(M(j\omega)) = \rho(M(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega \neq 0$$

gefordert und zusätzlich die Stabilität des System für $\omega = 0$.

4.4.4 Spezialfälle und Beispielverknüpfungen

Die Verknüpfungsstrukturen, die in Kapitel 3.5 vorgestellt wurden, können jetzt mit Hilfe der in Kapitel 4.4.2 allgemein hergeleiteten Stabilitätsbedingungen untersucht werden. Für jede Verknüpfungsmatrix kann der totzeitabhängige und totzeitunabhängige Stabilitätsbereich sowie die Totzeit $\bar{\tau}$ angegeben werden. Die Berechnung von $\bar{\tau}$ kann für die betrachteten Fälle wesentlich vereinfacht werden.

Da für den totzeitunabhängig stabilen Parameterbereich die Bedingung $a < 0$ bei allen Verknüpfungsstrukturen erfüllt sein muss (Satz 4.1), wird diese im Folgenden nicht immer explizit aufgeführt. Die Notation wird durch $\lambda(C) = \lambda$ und $\rho(C) = \rho$ vereinfacht.

Um den Unterschied im Stabilitätsverhalten der verschiedenen Verknüpfungsmuster deutlich zu machen, wurde bei jedem Beispiel der 3x3-Fall graphisch dargestellt (Abbildungen 4.5 – 4.11). In den Abbildungen ist links der skalierte Fall und rechts der unskalierte Fall aufgezeichnet. Der dunkel eingefärbte Bereich ist totzeitunabhängig stabil, der helle Bereich totzeitabhängig stabil. Um eine übersichtliche und anschauliche 3D-Graphik zu erhalten, wurden alle Werte $\bar{\tau} \geq 8$ als $\bar{\tau} = 8$ dargestellt. Das heißt, auch der totzeitunabhängig stabile Bereich mit $\bar{\tau} = \infty$ ist in der Graphik durch $\bar{\tau} = 8$ dargestellt.

a. Symmetrische Verknüpfungsmatrizen

Die Stabilitätsbereiche symmetrischer Matrizen $C = C^T$, werden mit den Ungleichungen aus Satz 4.1 und Satz 4.2 bestimmt. Es können dabei fünf

verschiedene Fälle unterschieden werden (Tabelle 4.1).

Mit λ_{max} wird die Menge der betragsmäßig größten Eigenwerte bezeichnet. $\lambda_{max} > 0$ bedeutet, dass alle Eigenwerte der Menge λ_{max} positiv sind. Mit m_{grenz} wird die Steigung der Geraden bezeichnet, die den totzeitabhängig stabilen Bereich begrenzt (Satz 4.1); $k = 1, \dots, n$.

Fall	Eigenschaften der Eigenwerte	m_{grenz}
1	$\lambda_{max} > 0, \exists \lambda_k < 0$	$\left \min_k \{\lambda_k\} \right ^{-1}$
2	$\lambda_{max} < 0, \exists \lambda_k > 0$	$-\left(\max_k \{\lambda_k\} \right)^{-1}$
3	$\nexists \lambda_k < 0$	$-\left(\min_k \{\lambda_k\} \right)^{-1}$
4	$\nexists \lambda_k > 0$	$\left \max_k \{\lambda_k\} \right ^{-1}$

Tabelle 4.1: Totzeitabhängiger Stabilitätsbereich symmetrischer Verknüpfungsmatrizen

Gibt es einen positiven und einen negativen Eigenwert, die beide betragsmäßig gleich groß sind mit $|\lambda| = \rho$, d.h. $\lambda_{max} = \{\pm \rho\}$, dann existiert *kein totzeitabhängig stabiler Bereich*.

Die Bereiche sind beispielhaft in Abbildung 4.5 dargestellt. Beachtenswert ist, dass in Fall 3 und 4 auch totzeitabhängig stabile Parameterpaare (a, b) mit $a > 0$ existieren. Das bedeutet, ein Netzwerk aus instabilen Teilsystemen ist für kleine Totzeiten stabil.

Für Fall 1 und 2 lässt sich $\bar{\tau}$ aus

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{b^2 \lambda_{max}^2 - a^2}} \arccos \left(\frac{-a}{b \lambda_{max}} \right) \tag{4.46}$$

berechnen. Die Herleitung dieser Gleichung aus dem allgemeinen Fall ist im Anhang B.2 beschrieben.

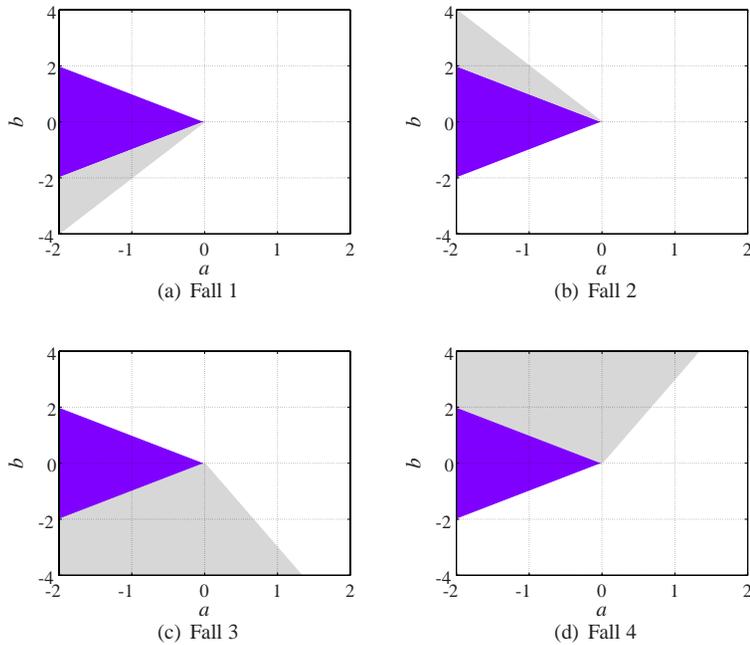


Abbildung 4.5: Symmetrische Verknüpfungsmatrizen: totzeitunabhängig stabil (dunkel), totzeitabhängig stabil (hell)

Mit diesen Ergebnissen werden die Beispielverknüpfungen Netz-Struktur und Stern-Struktur untersucht.

Beispiel 7 (Die Netz-Struktur).

Die Stabilitätseigenschaften der Verknüpfungsstruktur aus Beispiel 1 mit den Eigenwerten aus Tabelle 3.1 werden in Tabelle 4.2 zusammengefasst.

	unskaliert	skaliert
für beide Bereiche	$a < b, a < -(n-1)b$	$a < -b, a < \frac{1}{n-1}b$
totzeitunabh. stabil	$b^2(n-1)^2 \leq a^2$	$b^2 \leq a^2$
totzeitabh. stabil	$b^2(n-1)^2 > a^2$	$b^2 > a^2$
$\bar{\tau}$	$\frac{1}{\sqrt{b^2(n-1)^2 - a^2}} \arccos\left(\frac{-a}{b(n-1)}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arccos\left(\frac{-a}{b}\right)$

Tabelle 4.2: Stabilitätseigenschaften der symmetrischen Netz-Struktur

Das Stabilitätsverhalten für $n = 3$ ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Interessant ist, dass die Totzeit $\bar{\tau}$ beim Übergang vom instabilen zum totzeitabhängig stabilen Parameterbereich einen Sprung macht. Der Grund hierfür ist, dass der Eigenwert, der dafür verantwortlich ist, dass das System instabil wird, nicht in die Berechnung der Totzeit $\bar{\tau}$ eingeht (Tabelle 4.1).

Beispiel 8 (Die Stern-Struktur).

Die Stabilitätseigenschaften der Verknüpfungsstruktur aus Beispiel 2 mit den Eigenwerten aus Tabelle 3.1 werden in Tabelle 4.3 zusammengefasst.

	unskaliert	skaliert
für beide Bereiche	$a < 0, a < \pm\sqrt{n-1}b$	$a < 0, a < \pm b$
totzeitunabh. stabil	$b^2(n-1) \leq a^2$	$b^2 \leq a^2$
totzeitabh. stabil	$b^2(n-1) > a^2$	$b^2 > a^2$
$\bar{\tau}$	–	–

Tabelle 4.3: Stabilitätseigenschaften der symmetrischen Stern-Struktur

Das Stabilitätsverhalten für $n = 3$ ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Die Stern-Struktur hat keinen totzeitabhängig stabilen Parameterbereich.

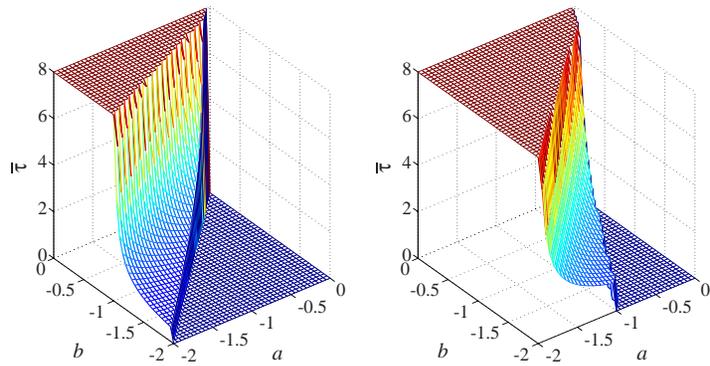
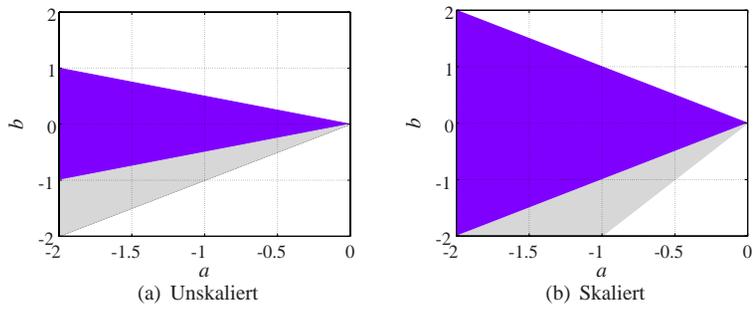


Abbildung 4.6: Stabilitätsverhalten der symmetrischen Netz-Struktur ($n = 3$)

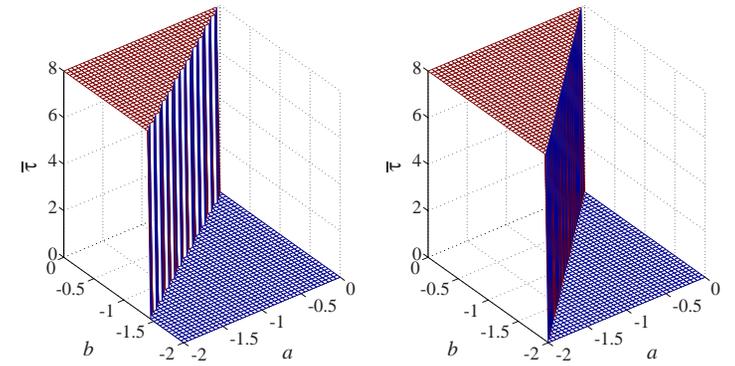
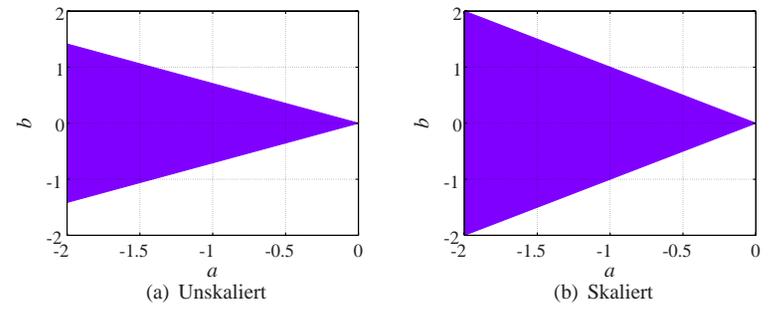


Abbildung 4.7: Stabilitätsverhalten der symmetrischen Stern-Struktur ($n = 3$)

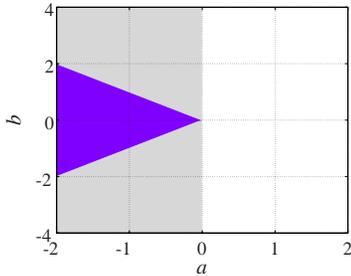


Abbildung 4.8: Schiefsymmetrische Verknüpfungsmatrizen: totzeitunabhängig stabil (dunkel), totzeitabhängig stabil (hell)

b. Schiefsymmetrische Verknüpfungsmatrizen

Die Stabilitätsbereiche schiefsymmetrischer Matrizen $C = -C^T$ (Satz 4.1, Satz 4.2) sind in Abbildung 4.8 beispielhaft dargestellt.

Für die Totzeit $\bar{\tau}$ vereinfacht sich die allgemeine Formel (4.39) zu

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2\sqrt{b^2\rho^2 - a^2}} \arccos\left(1 - \frac{2a^2}{b^2\rho^2}\right). \quad (4.47)$$

Eine ausführliche Herleitung befindet sich im Anhang B.3. Die Formel, die in Kapitel 4.3.2. für das 2x2-System bestimmt wurde, ist ein Spezialfall von (4.47).

Das Stabilitätsverhalten der Beispielverknüpfungen aus Kapitel 3.5 wird in den nächsten Beispielen untersucht.

Beispiel 9 (Die Netz-Struktur).

Die Stabilitätseigenschaften der Verknüpfungsstruktur aus Beispiel 3 werden in Tabelle 4.4 zusammengefasst.

	unskaliert	skaliert
für beide Bereiche	$a < 0$	$a < 0$
totzeitunabh. stabil	$b^2\rho^2 \leq a^2$	$b^2 \frac{\rho^2}{(n-1)^2} \leq a^2$
totzeitabh. stabil	$b^2\rho^2 > a^2$	$b^2 \frac{\rho^2}{(n-1)^2} > a^2$
$\bar{\tau}$	$\frac{\arccos\left(1 - \frac{2a^2}{b^2\rho^2}\right)}{2\sqrt{b^2\rho^2 - a^2}}$	$\frac{(n-1) \arccos\left(1 - \frac{2a^2(n-1)^2}{b^2\rho^2}\right)}{2\sqrt{b^2\rho^2 - (n-1)^2 a^2}}$

Tabelle 4.4: Stabilitätseigenschaften der schiefsymmetrischen Netz-Struktur

Die Eigenwerte können aus Beispiel 3 entnommen werden. ρ ist der Spektralradius der unskalierten Matrix C . Das Stabilitätsverhalten für $n = 3$ ist in Abbildung 4.9 dargestellt.

Beispiel 10 (Die Stern-Struktur).

Die Stabilitätseigenschaften der Verknüpfungsstruktur aus Beispiel 4 mit den Eigenwerten aus Tabelle 3.1 werden in Tabelle 4.5 zusammengefasst.

	unskaliert	skaliert
für beide Bereiche	$a < 0$	$a < 0$
totzeitunabh. stabil	$b^2(n-1) \leq a^2$	$b^2 \leq a^2$
totzeitabh. stabil	$b^2(n-1) > a^2$	$b^2 > a^2$
$\bar{\tau}$	$\frac{\arccos\left(1 - \frac{2a^2}{b^2(n-1)}\right)}{2\sqrt{b^2(n-1) - a^2}}$	$\frac{\arccos\left(1 - \frac{2a^2}{b^2}\right)}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$

Tabelle 4.5: Stabilitätseigenschaften der schiefsymmetrischen Stern-Struktur

Das Stabilitätsverhalten für $n = 3$ ist in Abbildung 4.10 dargestellt.

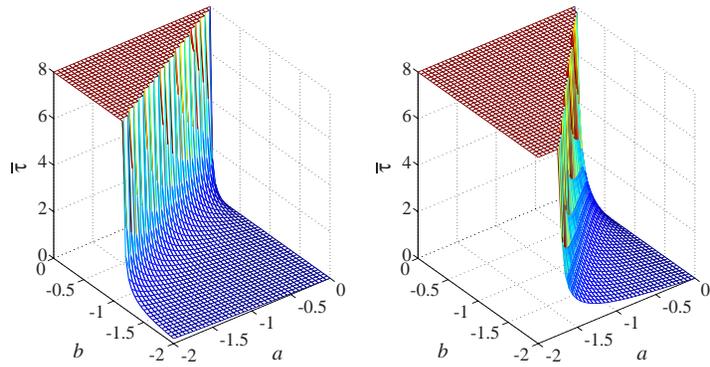
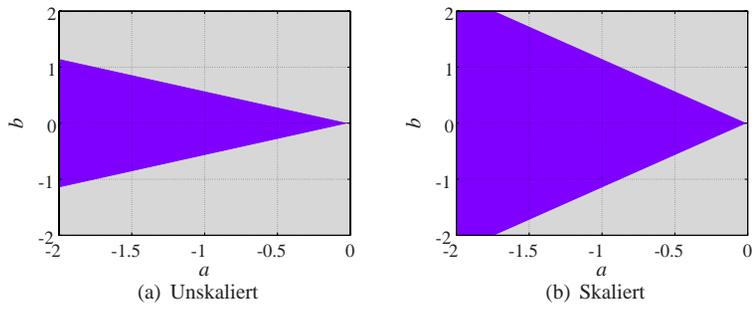


Abbildung 4.9: Stabilitätsverhalten der schiefsymmetrischen Netz-Struktur ($n = 3$)

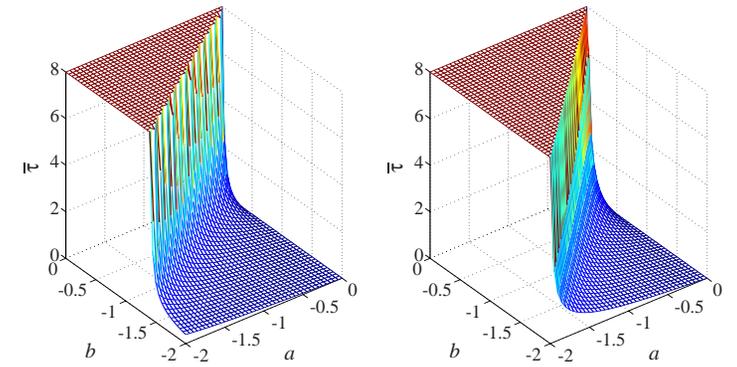
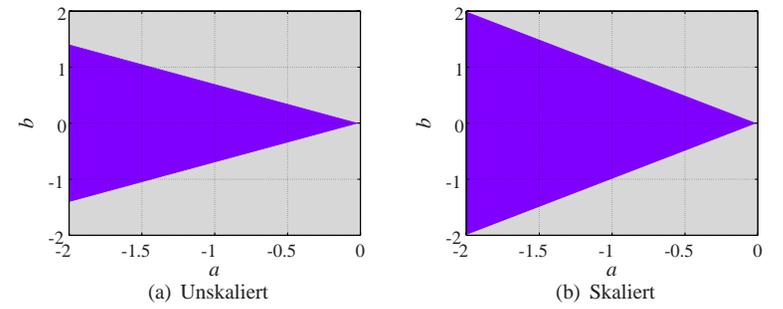


Abbildung 4.10: Stabilitätsverhalten der schiefsymmetrischen Stern-Struktur ($n = 3$)

c. Die Kreis-Struktur

Die Kreis-Struktur (Beispiel 5) verhält sich interessanterweise unterschiedlich für gerade und ungerade Anzahl an Knoten.

Für eine *gerade* Anzahl an Knoten, sind die betragsmäßig größten Eigenwerte $\lambda_{max_{1,2}} = \pm 1$. Für n *ungerade* ist $\lambda_{max} = 1$. Dieser Unterschied macht sich im Stabilitätsverhalten bemerkbar.

Beispiel 11 (Die Kreis-Struktur).

Die Stabilitätsbereiche werden in Tabelle 4.6 angegeben.

	n gerade	n ungerade
für beide Bereiche	$a < -b, a < b$	$a < -b, a < -\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)b$
totzeitunabh. stabil	$b^2 \leq a^2$	$b^2 \leq a^2$
totzeitabh. stabil	$b^2 > a^2$	$b^2 > a^2$
$\bar{\tau}$	–	$\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \left(\frac{\pi}{n} - \arccos\left(\frac{a}{b}\right) \right)$

Tabelle 4.6: Stabilitätseigenschaften der Kreis-Struktur

Für n gerade existiert kein totzeitabhängiger Stabilitätsbereich. Die Herleitung der Totzeit $\bar{\tau}$ aus der allgemeinen Formel (4.39) ist im Anhang B.4 nachzulesen.

Das Stabilitätsverhalten für $n = 3$ (links) bzw. $n = 4$ (rechts) ist in Abbildung 4.11 dargestellt.

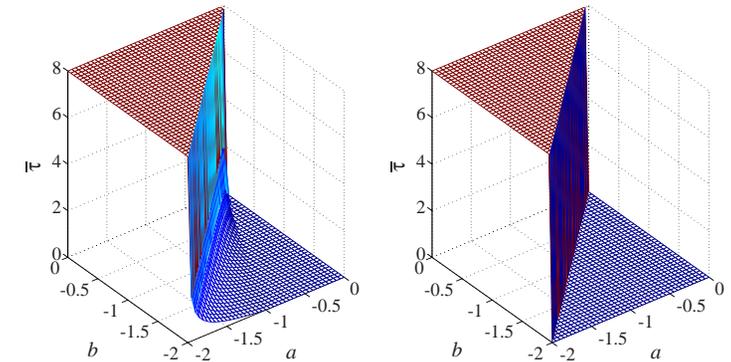
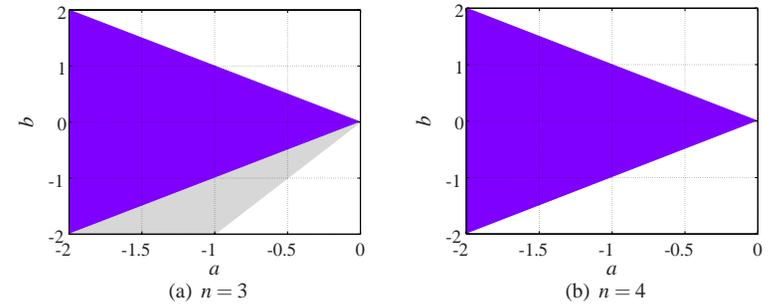


Abbildung 4.11: Stabilitätsverhalten der Kreis-Struktur

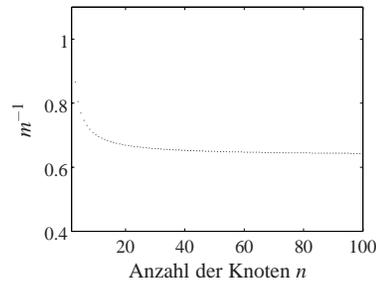


Abbildung 4.12: Schiefsymmetrische Netz-Struktur: inverse Steigung der den totzeitunabhängigen Bereich begrenzenden Geraden

4.4.5 Vergleich der verschiedenen Netzwerk-Strukturen

Im vorigen Abschnitt wurden die in Kapitel 3.5 eingeführten Beispielverknüpfungen *einzel*n untersucht. Die Ergebnisse werden jetzt in einen Zusammenhang gestellt. Dazu werden zum einen die totzeitunabhängigen Stabilitätsbereiche betrachtet und zum Anderen die Totzeiten $\bar{\tau}$ für feste Parameterpaare (a, b) verglichen. Betrachtet wird auch der Einfluss der Skalierung auf das Stabilitätsverhalten der Beispielverknüpfungen.

a. Vergleich der Stabilitätsbereiche

Bei den betrachteten *unskalierten* Stern- und Netz-Strukturen wird der totzeitunabhängig stabile Parameterbereich für größer werdende Anzahl an Knoten kleiner. Durch eine Skalierung des Systems erreicht man, dass der totzeitunabhängig stabile Parameterbereich für alle $n \times n$ -Systeme gleich ist (Beispiele 7, 8, 10) oder sogar für eine größere Anzahl an Knoten größer wird (Beispiel 9). Für die zuerst genannten Beispiele 7, 8 und 10 wird der skalierte, totzeitunabhängige Stabilitätsbereich durch Geraden der Steigung eins begrenzt (z.B. Abbildung 4.7(b)). In Beispiel 9 (schiefsymmetrische Netz-Struktur) ist der skalierte, totzeitunabhängige Stabilitätsbereich größer. Abbildung 4.12 zeigt die inverse Steigung m^{-1} der begrenzenden Geraden. Je kleiner dieser Wert ist, umso größer wird der Stabilitätsbereich.

Verknüpfung	m	m_{skal}
symmetrische Netz-Struktur	0.25	1
symmetrische Stern-Struktur	0.5	1
schiefsymmetrische Netz-Struktur	0.33	1.300
schiefsymmetrische Stern-Struktur	0.5	1
Kreis-Struktur	1	--

Tabelle 4.7: Vergleich der totzeitunabhängigen Stabilitätsbereiche eines 5-Knoten-Systems

Bemerkung 4.8.

Bei Netz-Strukturen kann die Skalierung der Verknüpfungsmatrix C auch als eine Skalierung des Parameters b interpretiert werden

$$b_{\text{skal}} = \frac{b}{n-1}.$$

In Tabelle 4.7 ist die Steigung m der Geraden, die den totzeitunabhängigen Bereich eines 5-Knoten-Systems begrenzen, dargestellt. Die Steigung ist sowohl für den unskalierten (m), als auch für den skalierten Fall (m_{skal}) angegeben (gerundet auf zwei Nachkomma-Stellen). Je größer die Steigung ist, umso größer ist der zugehörige totzeitunabhängige Stabilitätsbereich. Im unskalierten Fall liefert die Kreis-Struktur den größten Stabilitätsbereich. Das liegt daran, dass in diesem Fall im Gegensatz zu den anderen Verknüpfungsstrukturen jeder Knoten nur einen Eingang hat. Sollen also wirklich die *Verknüpfungsstrukturen* verglichen werden, ist eine Skalierung sinnvoll. Hier sieht man, dass die schiefsymmetrische Netzstruktur den größten Bereich liefert (vergleiche auch Abbildung 4.12).

b. Vergleich der Totzeit $\bar{\tau}$

In Tabelle 4.8 sind die Totzeiten $\bar{\tau}_1$ bzw. $\bar{\tau}_2$ der Beispielverknüpfungen für die Parameterpaare

$$\text{Paar 1: } (a, b) = (-1.4, -1.5) \quad \text{bzw.} \quad (4.48)$$

$$\text{Paar 2: } (a, b) = (-1.4, -1.3) \quad (4.49)$$

Verknüpfung	$\bar{\tau}_1$	$\bar{\tau}_{\text{skal},1}$	$\bar{\tau}_2$	$\bar{\tau}_{\text{skal},2}$
symmetrische Netz-Struktur	0	5.15	0.98	∞
symmetrische Stern-Struktur	0	0	0	∞
schiefsymmetrische Netz-Struktur	0.26	∞	0.38	∞
schiefsymmetrische Stern-Struktur	0.45	2.24	0.73	∞
Kreis-Struktur	1.26	--	∞	--

Tabelle 4.8: Vergleich der Totzeit $\bar{\tau}$ eines 3-Knoten-Systems – Paar 1: $(a, b) = (-1.4, -1.5)$, Paar 2: $(a, b) = (-1.4, -1.3)$

angegeben (gerundet auf zwei Nachkomma-Stellen). Die betrachteten Systeme bestehen aus 3 Knoten.

Die Zahlenwerte zeigen, dass sich eine Skalierung positiv auf das Stabilitätsverhalten auswirken kann. Außerdem bestätigen die Werte, dass für betragsmäßig kleinere b der Totzeit-Bereich $[0, \bar{\tau})$, in dem das System stabil ist, größer wird. Ansonsten ist es stark von den gewählten Parametern (a, b) abhängig, welche Netzstruktur den größten Stabilitätsbereich liefert.

4.4.6 Zusammenfassung

Der Frequency-Sweeping-Test liefert, wie in den obigen Beispielen zu sehen war, für die betrachteten Netzwerke (3.8) *allgemeine Stabilitätsaussagen* in Abhängigkeit der Parameter (a, b) und der Verknüpfungsmatrix C . Interessant ist dabei, dass das Stabilitätsverhalten direkt von der Verknüpfungsstruktur bzw. von den Eigenwerten $\lambda(C)$ abhängt. Der totzeitunabhängig stabile Bereich hat für alle Netzwerke die in Abbildung 4.3 dargestellte Form.

Die klassischen Stabilitätstests beruhen auf Variableneliminierung bzw. Transformation und können große Systeme nur mit Hilfe komplexer Algorithmen untersuchen. Im Gegensatz dazu sind mit dem Frequency-Sweeping-Test auch Stabilitätsaussagen für große Netzwerke einfach möglich. Die Frequenzachse wird „diskretisiert“ und für jeden Wert ω_i die Eigenwerte bestimmt. Daher die Bezeichnung „frequency sweeping“. Für alle Frequenzen, für die $|\lambda_k(\omega_i)| = 1$, kann ein $\tau_{k,i}$ berechnet werden und daraus das Minimum $\bar{\tau}$.

Diese Vorgehensweise ist auch für andere Netzwerktypen möglich, z.B. Netzwerke bestehend aus Knoten, die durch Differentialgleichungen höherer Ordnung beschrieben werden. Der Frequency-Sweeping-Test bestimmt das Stabilitätsverhalten exakt, die Bedingungen sind notwendig und hinreichend, und ist erweiterbar auf Systeme mit kommensurablen Totzeiten [Gu u. a. 2003].

4.5 Test über konstanten Matrizen

Dieser Test hat seine Vorteile in der einfachen und genauen numerischen Berechnung. Allgemeine Stabilitätsaussagen für $n \times n$ -Systeme können mit diesem Test jedoch nicht gemacht werden. Aufgrund dieser Tatsache wird nur kurz auf die Analyseverfahren eingegangen und für genauere Erläuterung auf [Gu u. a. 2003] verwiesen.

Der Frequency-Sweeping-Test aus dem vorigen Kapitel hat zu sehr guten allgemeinen Stabilitätsaussagen geführt. Die numerische Berechnung der Eigenwerte und der Totzeit $\bar{\tau}$ weist allerdings Nachteile auf. Die Feinheit der Frequenzachsenunterteilung bestimmt die Genauigkeit der Berechnung. Besonders bei der Untersuchung auf totzeitabhängige Stabilität und bei der Bestimmung von $\bar{\tau}$ ist eine feine Diskretisierung für gute Ergebnisse notwendig. Dadurch steigt der Rechenaufwand.

Beim Test über konstante Matrizen ist kein Durchlauf durch die Frequenzen nötig, sondern lediglich die Berechnung der Eigenwerte von konstanten Matrizen, deren Ordnung allerdings höher ist. Dies erlaubt genauere numerische Ergebnisse.

4.6 Vergleich der Analysemethoden

Ausgehend von den klassischen Stabilitätstests wurden zwei weitere Methoden zur Stabilitätsanalyse vorgestellt, der Frequency-Sweeping-Test und der Test über konstante Matrizen.

Die Herleitung basiert bei allen drei Tests, bei den klassischen Stabilitätstests ebenso wie bei dem Frequency-Sweeping-Test und dem Test über konstante Matrizen, auf der Berechnung der Lösungspare $\{(\omega_k, \tau_k) \mid p(j\omega_k, e^{-j\tau_k\omega_k}) = 0\}$ des charakteristischen Polynoms. Ein wichtiger Punkt bei der Herleitung ist die Stetigkeit des Stabilitätsexponenten $\alpha_0(\tau)$ bezüglich τ . Der Unterschied der Methoden liegt in der Art der Berechnung dieser Paare. Die klassischen Tests beruhen im Wesentlichen auf der Eliminierung einer Variablen bzw. der Variablentransformation. Sie sind für große Systeme und mehrere Totzeiten wenig geeignet. Dagegen können die Bedingungen des Frequency-Sweeping-Tests und des Tests über konstante Matrizen effizient implementiert werden. Beide Tests basieren auf der Berechnung der Eigenwerte oder verallgemeinerten Eigenwerte von frequenzabhängigen bzw. konstanten Matrizen.

Um allgemeine Stabilitätsaussagen für Netzwerke mit n Knoten zu erhalten, hat sich der Frequency-Sweeping-Test als geeignet herausgestellt. Für kleinere Systeme erhält man solche Ergebnisse auch aus den klassischen Stabilitätstests.

Mit den vorgestellten Methoden im Frequenzbereich können auch *lineare Systeme mit kommensurablen Totzeiten* untersucht werden

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_k A_k x(t - \tau_k) \quad \text{mit} \quad \frac{\tau_i}{\tau_j} \in \mathbb{Q}^+.$$

Die hier betrachteten Methoden machen allerdings keine Aussagen über inkommensurable Totzeiten. Für inkommensurable Totzeiten erhält man mit Hilfe des Small-Gain-Theorems notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingungen. Allerdings muss dabei der strukturierte singuläre Wert berechnet werden, der nicht exakt bestimmt werden kann. Aufgrund dessen sind exakte, notwendige und hinreichende Ergebnisse, wie sie für kommensurable Totzeiten berechnet werden können, für inkommensurable Totzeiten nicht möglich.

Die in diesem Kapitel behandelten Tests werden in Tabelle 4.9 noch einmal gegenübergestellt. Diese Tabelle lässt sich später mit den Analysemethoden im Zeitbereich vergleichen (Tabelle 5.3).

	klassische Tests	Frequency-Sweeping-Test	Test über konstante Matrizen
notwendige und hinreichende Bedingung	++	++	++
direkte Aussage über totzeitunabhängige Stabilität	++	++	++
Aussage über totzeitabhängige Stabilität	++	++	++
numerische Berechnung	-	+	++
allgemeine Aussagen in Abh. von Parametern	+	++	--
erweiterbar auf $\tau = \tau(t)$	--	--	--
erweiterbar auf mehrere <i>kommensurable</i> Totzeiten	-	+	++
erweiterbar auf Knoten mit DGLs höherer Ordnung	-	++	++

Bewertung: „++“ (gut möglich/erfüllt) bis „--“ (nicht geeignet/stabilitätstests nicht erfüllt).

Tabelle 4.9: Vergleich der Analysemethoden im Frequenzbereich

Kapitel 5

Stabilität von Systemen mit konstanter Totzeit im Zeitbereich

In diesem Kapitel wird die Stabilität von Netzwerken im Zeitbereich untersucht. Die verschiedenen Stabilitätskriterien werden bezüglich ihrer Aussagekraft für vernetzte Systeme mit konstanter Totzeit verglichen. Im Gegensatz zu den Untersuchungen im Frequenzbereich kann im Zeitbereich das Stabilitätsverhalten nur *numerisch* bestimmt werden.

Kapitel 5.1 liefert eine kurze Einführung und gibt einen detaillierten Überblick über die nachfolgenden Kapitel. Es werden hier sowohl totzeitunabhängige (Kapitel 5.2), als auch totzeitabhängige Stabilitätskriterien (Kapitel 5.3) behandelt. Am Ende werden die verschiedenen Kriterien verglichen (Kapitel 5.4).

5.1 Einführung und Übersicht

Die Untersuchungen im Zeitbereich basieren auf der *Methode von Ljapunow*. In Kapitel 2.5 wurde diese bekannte Methode auf Totzeit-Systeme erweitert. Für die Wahl der Ljapunow-Funktion V gibt es bei Totzeit-Systemen zwei verschiedene Ansätze. Das Ljapunow-Krasovskii Theorem 2.2 liefert Stabilitätsbedingungen für die Wahl eines Funktionals $V(x_t)$, auch *Ljapunow-Krasovskii-Funktional* genannt. Im Razumikhin Theorem 2.3 werden Stabilitätsaussagen für den Fall einer *Ljapunow-Funktion*

$V(x(t))$ gemacht.

In diesem Kapitel werden lineare, zeitinvariante Systeme der Form

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau), \quad A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \tau = \text{const.} \quad (5.1)$$

mit der Anfangsbedingung $x_0 = \phi_0 \in \mathcal{C}$ betrachtet. Das Netzwerk-Modell (3.8) ist ein Spezialfall dieser allgemeinen Systemdarstellung. Desweiteren werden nur Ljapunow-Funktionen $V(x(t))$ bzw. Ljapunow-Krasovskii-Funktionale $V(x_t)$ verwendet, für die folgende Ungleichungen

$$V(x(t)) \leq K \|x(t)\|^2 \quad \text{bzw.} \quad V(x_t) \leq K \|x_t\|_c^2 \quad (5.2)$$

erfüllt sind.

Die Vorgehensweise bei der Untersuchung von Totzeit-Systemen ist analog zum totzeitfreien Fall. Es wird eine Ljapunow-Funktion gewählt, die die Bedingung (2.14) erfüllt, oder ein Ljapunow-Krasovskii-Funktional, für das die Ungleichung (2.11) gilt. Aus der Änderung von V entlang der System-Trajektorien erhält man dann Aussagen über die Stabilität des Systems (Gleichung (2.14) bzw. (2.11)). Unter den oben getroffenen Annahmen (5.1), (5.2) ergeben sich Stabilitätsbedingungen in Form von LMIs. Für Erläuterungen zu LMIs wird auf [Scherer und Weiland 2000] verwiesen.

Die Stabilitätskriterien, die man mit Hilfe von Ljapunow-Funktionen bzw. Ljapunow-Funktionalen erhält, sind lediglich *hinreichende* Bedingungen. Diese Bedingungen führen unter Umständen zu sehr konservativen Stabilitätsaussagen, d.h. es gibt Systeme, die stabil sind, die Ljapunow-Stabilitätsbedingungen aber nicht erfüllen. Aus diesem Grund spielt die Wahl von V eine wesentliche Rolle. Außerdem können die Ergebnisse durch eine geeignete *Modell-Transformation* (Kapitel 5.3) verbessert werden.

Die aus \dot{V} erhaltenen LMIs können sehr effizient numerisch gelöst werden. In MATLAB steht hierfür die LMI Control Toolbox zur Verfügung. Erläuterungen zu dieser Toolbox findet man in [Gahinet u. a. 1995] und [Skogestad und Postlethwaite 2005]. Die Herleitung von allgemeinen

parameterabhängigen Aussagen aus LMIs ist allerdings schwierig. Bedingungen für das n -Knoten-Netzwerk (3.8), wie sie im Frequenzbereich gewonnen wurden, konnten hier nicht erhalten werden.

In diesem Kapitel soll der Vergleich der unterschiedlichen auf dem Ljapunow-Krasovskii Theorem und dem Razumikhin Theorem basierenden Stabilitätskriterien im Vordergrund stehen. Dazu wird kurz auf die Idee der verschiedenen Ansätze eingegangen, der Hauptaugenmerk liegt aber auf der Herausarbeitung der Unterschiede und dem Aufzeigen der Vor- und Nachteile. Ziel ist es, geeignete Kriterien für die Stabilitätsuntersuchung von Netzwerken zu finden. Die Theoreme und Beweise zu den einzelnen Ansätzen werden in [Gu u. a. 2003] ausführlich beschrieben.

Im Folgenden werden zunächst zwei Kriterien vorgestellt, die Aussagen über die totzeitunabhängige Stabilität eines Systems machen (Kapitel 5.2). Diese beiden aus dem Ljapunow-Krasovskii Theorem bzw. aus dem Razumikhin Theorem hergeleiteten Kriterien werden ausführlicher behandelt, da sich hier sehr schön der Unterschied zwischen den beiden Theoremen aufzeigen lässt. Bei den totzeitabhängigen Stabilitätskriterien (Kapitel 5.3) werden zwei Möglichkeiten der Modell-Transformation angesprochen (Kapitel 5.3.1, 5.3.2). Das transformierte System kann dann wieder mit Hilfe des Ljapunow-Krasovskii Theorems oder mit Hilfe des Razumikhin Theorems analysiert werden. Auf die beiden Theoreme wird hier allerdings nicht mehr explizit eingegangen, da die Unterschiede sehr ähnlich zum totzeitunabhängigen Fall sind. Anschließend wird noch die Analyse mittels eines vollständig quadratischen Ljapunow-Krasovskii-Funktional betrachtet (Kapitel 5.3.3). Am Ende (Kapitel 5.4) steht ein Abschnitt, der die verschiedenen Stabilitätskriterien vergleicht.

5.2 Totzeitunabhängige Stabilitätskriterien

Um das System (5.1) mit dem Razumikhin Theorem auf totzeitunabhängige Stabilität zu untersuchen, wird die einfache Ljapunow-Funktion

$$V(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0 \quad (5.3)$$

gewählt. Selbst im totzeitabhängigen Fall reicht es aus diese Ljapunow-Funktion zu betrachten. Mit $P > 0$ ist die Ungleichung $V(x) \geq \varepsilon \|x\|^2$ erfüllt

und nach [Gu u. a. 2003] führt die Bedingung für $\dot{V}(x(t))$ auf

$$\begin{pmatrix} PA_0 + A_0^T P + \alpha P & PA_1 \\ A_1^T P & -\alpha P \end{pmatrix} < 0, \quad \alpha > 0. \quad (5.4)$$

Sind alle Eigenwerte dieser symmetrischen Matrix negativ, dann ist das System stabil. Gleichung (5.4) ist wegen des Terms αP keine LMI (vergleiche Kapitel 5.4.1).

Ein ähnliches Stabilitätskriterium wie (5.4) kann auch aus dem Ljapunow-Krasovskii Theorem hergeleitet werden. Wird

$$V(x_t) = x^T(t) P x(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(\xi) S x(\xi) d\xi, \quad P = P^T > 0, S = S^T > 0 \quad (5.5)$$

als Ljapunow-Krasovskii-Funktional gewählt, ergibt sich für $\dot{V}(x_t)$ die LMI

$$\begin{pmatrix} PA_0 + A_0^T P + S & PA_1 \\ A_1^T P & -S \end{pmatrix} < 0. \quad (5.6)$$

Das Ergebnis (5.6) aus dem Ljapunow-Krasovskii Theorem entspricht dem Resultat aus dem Razumikhin Theorem (5.4), wenn die *zusätzliche Bedingung* $S = \alpha P$ erzwungen wird.

Die Eigenschaften der totzeitunabhängigen Stabilitätskriterien (5.4) und (5.6) lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Der Term $A_1 x(t - \tau)$ aus Gleichung (5.1) wird immer als Störterm betrachtet. Begründet wird dies durch die Tatsache, dass Gleichung (5.4) die Stabilität von A_0 implizit enthält. Anschaulich heißt das: Für ein für $A_1 = 0$ stabiles System liefern die Ungleichungen (5.4) und (5.6) eine „obere Grenze“, die von der Matrix A_1 nicht überschritten werden darf, wenn das System totzeitunabhängig stabil bleiben soll.
- Die Kriterien sind sehr konservativ, da sie die Größe von τ nicht berücksichtigen. Es macht nur Sinn, diese Kriterien zu verwenden, wenn eine obere Grenze für τ nicht bekannt ist, was sehr selten der Fall ist, oder wenn Gleichung (5.1) vom ersten Summanden dominiert wird, d.h. A_1 „klein“ ist.
- Die Kriterien eignen sich, wenn nur garantiert werden soll, dass der zeitverzögerte Term $A_1 x(t - \tau)$ das nominelle System $\dot{x}(t) = A_0 x(t)$ nicht destabilisiert.

5.3 Totzeitabhängige Stabilitätskriterien

5.3.1 Explizite Modell-Transformation

Die explizite Modell-Transformation betrachtet folgenden Aspekt: Häufig ist es wünschenswert, dass in einem System keine Zeitverzögerungen auftreten, da sich diese nachteilig auf die Stabilität und die Performance des Systems auswirken. Ein Beispiel hierfür ist ein instabiler, offener Kreis $\dot{x}(t) = A_0 x(t)$, der durch eine Rückführung stabilisiert wird. Kleine Zeitverzögerungen in der Rückführung (durch Verzögerungen in der Messung des Ausgangs o.ä.) können in diesem Fall die Regelgüte verschlechtern und das System kann sogar instabil werden. Auch bei den in dieser Arbeit betrachteten Netzwerken (3.8) sind die Zeitverzögerung, die durch die Informationsübertragung entstehen, unerwünscht.

Das System (5.1) wird, um dieser Tatsache gerecht zu werden, in der Form

$$\dot{x}(t) = \underbrace{(A_0 + A_1)x(t)}_{\text{nominelles System}} + \underbrace{A_1(x(t - \tau) - x(t))}_{\text{Störung}} \quad (5.7)$$

notiert. Das nominelle System ist stabil für $\tau = 0$ mit zufriedenstellender Performance. Nimmt τ zu, wird der Störterm größer, die Performance wird schlechter und eventuell wird das System für ein $\tau = \bar{\tau}$ sogar instabil. Betrachtet wird also das erste Stabilitäts-Intervall $\tau \in [0, \bar{\tau}]$.

Die explizite Transformation überführt das Modell (5.1) in ein System bestehend aus einem Term ohne Totzeit und einem Stör-Term mit verteilter Totzeit [Gu u. a. 2003]

$$\dot{x}(t) = [A_0 + A_1]x(t) + \int_{-\tau}^0 [-A_1 A_0 x(t + \theta) - A_1 A_1 x(t - \tau + \theta)] d\theta. \quad (5.8)$$

Durch die Transformation erhält man ein neues Modell (5.8), das das Modell (5.1) enthält. Die Stabilität des neuen Systems impliziert also die Stabilität des Original-Systems. Umgekehrt gilt das nicht.

Das neue System wird mit dem Ljapunow-Krasovskii oder dem Razumikhin Theorem untersucht. Die Stabilitätskriterien, die sich daraus ergeben, sind abhängig von der Totzeit, da die Größe des Stör-Terms von

der Größe der Totzeit abhängt.

Die totzeitabhängigen Kriterien, die mittels expliziter Modell-Transformation erhalten wurden, weisen folgende Eigenschaften auf:

- Die Stabilitätsaussagen sind sehr konservativ. Die Ursachen liegen darin, dass nicht nur das Ljapunow-Krasovskii Theorem bzw. das Razumikhin Theorem von Natur aus konservativ ist, sondern dass auch die Transformation selbst zu Konservatismus führt. Durch die Transformation erhält man eine zusätzliche Dynamik, d.h. das transformierte System (5.8) hat Pole, die im Original-System (5.1) nicht existieren. Diese zusätzlichen Pole können – im Vergleich zu den Polen des ursprünglichen Systems – bereits für kleinere Werte von τ instabil werden. Das führt dazu, dass es totzeitunabhängig stabile Systeme (5.1) gibt, die diese totzeitabhängigen Bedingungen für bestimmte Werte von τ nicht erfüllen. Für diese Systeme geben die totzeitabhängigen Stabilitätskriterien eine obere Grenze $\bar{\tau}$ für die Totzeit an, obwohl das ursprüngliche System (5.1) totzeitunabhängig stabil ist (Abbildung 5.4, 5.5).
- Nur das erste Stabilitäts-Intervall $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, wird betrachtet.
- Die Totzeit wird als unerwünschte Störung angesehen. Es gibt aber auch Fälle, in denen ein instabiles System durch Einführen einer Totzeit stabilisiert wird [Gu u. a. 2003].

5.3.2 Implizite Modell-Transformation

Bei der impliziten Modell-Transformation werden die Modelle nicht direkt transformiert und anschließend die Stabilitätsbedingungen für diese transformierten Systeme bestimmt. Die Transformation wird hier implizit bei der Herleitung der Stabilitätskriterien für das Original-System verwendet [Gu u. a. 2003]. Diese Vorgehensweise wirkt sich folgendermaßen auf die Eigenschaften der Stabilitätskriterien aus:

- Die Stabilitätsaussagen sind wesentlich weniger konservativ als die durch explizite Modelltransformation erhaltenen. Das Stabilitätskriterium beinhaltet als Spezialfall den totzeitunabhängigen Fall (Kapitel 5.2) und das totzeitabhängige Stabilitätskriterium aus Kapitel

5.3.1. Systeme, die mit dem totzeitunabhängigen Kriterium als stabil klassifiziert werden, sind daher mit dem aus der impliziten Transformation erhaltenen Kriterium für alle Totzeiten τ stabil. Außerdem sind alle Systeme, die nach den Kriterien aus Kapitel 5.3.1 stabil sind, auch mit dem impliziten Kriterium stabil (Abbildung 5.6).

- Wird zur Herleitung des Razumikhin Theorem verwendet, ergeben sich, wie in Kapitel 5.3, auch hier Bedingungen, die keine LMIs sind [Gu u. a. 2003]. In diesem Fall erhält man allerdings *drei* zusätzliche Parameter α , α_0 und α_1 , die die Auswertung des Kriteriums sehr erschweren. Aus diesem Grund wurde die implizite Transformation mit dem Razumikhin Theorem nicht in MATLAB programmiert. Weitere Erläuterungen dazu in Kapitel 5.4.1.

5.3.3 Diskretisiertes Ljapunow-Funktional

Die Ergebnisse aus den ersten beiden Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 betrachten Totzeiten immer als Störung. Das System mit Totzeit ist „weniger stabil“ als das ohne Totzeit. Diese negative Bewertung der Totzeit führt zu konservativen Ergebnissen. Das Kriterium, das im Folgenden vorgestellt wird, berücksichtigt die Tatsache, dass Totzeiten auch zur Stabilisierung von instabilen Systemen verwendet werden können.

Eine *notwendige und hinreichende* Bedingung für die Stabilität eines linearen Totzeit-Systems (5.1) ist die Existenz eines *vollständig quadratischen Ljapunow-Krasovskii-Funktional*s

$$V(\phi) = \int_{-\tau}^0 \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi(\theta) \end{bmatrix}^T M(\theta) \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi(\theta) \end{bmatrix} d\theta + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 \phi(\theta) R(\theta, \xi) \phi(\xi) d\theta d\xi, \quad (5.9)$$

das die Ungleichungen des Ljapunow-Krasovskii Theorems 2.2 erfüllt.

Ein System ist also genau dann stabil, wenn Matrizen $M(\theta)$, $R(\theta, \xi)$ $-\tau \leq \theta, \xi \leq 0$ gefunden werden können, so dass das Funktional (5.9) die Bedingungen des Theorems 2.2 erfüllt. Dies ist ein unendlich dimensionales Problem. Aus diesem Grund wird das Funktional diskretisiert. $M(\theta)$ und $R(\theta, \xi)$ werden durch stückweise lineare Funktionen approximiert. Das Zeitintervall $[-\tau, 0]$ wird dazu in N gleich große

Segmente unterteilt. Durch diese Diskretisierung lassen sich die Matrizen $M(\theta)$, $R(\theta, \xi)$ mit einer endlichen Zahl an Parametern beschreiben. Die Bedingungen des Ljapunow-Krasovskii Theorems 2.2 können dann in Form von LMIs dargestellt werden, deren Berechnung numerisch möglich ist.

Im Vergleich zu den anderen Stabilitätskriterien hat diese Methode folgende Eigenschaften:

- Bereits eine grobe Diskretisierung ($N = 1$) liefert sehr gute, wenig konservative Ergebnisse (Abbildung 5.7, 5.8 und 5.10).
- Im Gegensatz zu den obigen Kriterien können Stabilitätsbereiche der Form (τ_1, τ_2) , $\tau_1 \neq 0$ angegeben werden. Das diskretisierte Ljapunow-Funktional eignet sich damit auch für die Untersuchung von instabilen Systemen, die durch eine Totzeit stabilisiert werden. Keines der zuvor angeführten Kriterien kann für diesen Fall die Stabilität bestätigen.
- Die Matrizen, die auf Definitheit untersucht werden müssen, können abhängig vom gewählten System und von der Anzahl der Segmente N sehr groß werden [Gu u. a. 2003].

5.4 Vergleich der Analysemethoden

In diesem Abschnitt wird zunächst der Unterschied zwischen den aus dem Ljapunow-Krasovskii Theorem hergeleiteten Stabilitätskriterien und den aus dem Razumikhin Theorem gewonnenen Bedingungen aufgezeigt. Im Anschluss werden die im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Stabilitätskriterien anhand ihrer Resultate für das 2×2 -System (3.7) verglichen. Die Unterschiede lassen sich auch am Beispiel der symmetrischen Netzstruktur noch einmal schön verdeutlichen. Am Ende steht eine tabellarische Übersicht, die die Stabilitätskriterien – ähnlich wie im Frequenzbereich (Kapitel 4.6) – gegenüberstellt.

Die graphischen Darstellungen wurden mit Hilfe der MATLAB LMI Control Toolbox erstellt [Gahinet u. a. 1995]. $\bar{\tau}$ wurde durch ein Bisektionsverfahren berechnet. Der Fehler ϵ , der durch das Bisektionsverfahren entsteht, ist $\epsilon \leq 0.0001$.

5.4.1 Vergleich: Ljapunow-Krasovskii – Razumikhin

Aus dem Ljapunow-Krasovskii wie auch aus dem Razumikhin Theorem lassen sich totzeitunabhängige und totzeitabhängige Stabilitätskriterien herleiten. Im Wesentlichen unterscheiden sich die beiden Theoreme bzw. die daraus hergeleiteten Stabilitätskriterien in vier Punkten (Tabelle 5.1):

- Wahl von V
- Konservatismus der Kriterien
- Erweiterbarkeit auf $\tau = \tau(t)$
- Form der Kriterien.

In Kapitel 5.2 werden diese Unterschiede für den totzeitunabhängigen Fall deutlich.

Die Wahl der Ljapunow-Funktion V ist für das Razumikhin Theorem wesentlich einfacher. Alle oben vorgestellten Stabilitätskriterien, totzeitunabhängig und totzeitabhängig, wurden mit der einfachen Ljapunow-Funktion

$$V(x) = x^T P x, \quad P > 0$$

hergeleitet. Dagegen basiert das Ljapunow-Krasovskii Theorem auf der Wahl eines *Funktional* $V(x_t)$, das von $x(t + \theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$ abhängt. Gleichung (5.5) ist ein Beispiel für ein solches Funktional. Bei der Wahl von $V(x_t)$ hat man unendlich viele Freiheitsgrade.

Ein Vorteil des Ljapunow-Krasovskii-Theorems ist, dass durch die große Freiheit bei der Wahl des Funktionals wesentlich weniger konservative Stabilitätsaussagen erhalten werden können als mit dem Razumikhin Theorem. Es existieren sogar notwendige und hinreichende Bedingungen für die Stabilität eines Systems (5.9). Werden die beiden in Kapitel 5.2 aus dem Ljapunow-Krasovskii bzw. aus dem Razumikhin Theorem hergeleiteten Stabilitätskriterien (5.6) und (5.4) miteinander verglichen, dann wird der Konservatismus der Razumikhin-Ergebnisse deutlich. Die Parameter der Matrix S , die in Gleichung (5.6) unabhängig voneinander gewählt werden können, werden in Gleichung (5.4) durch die Bedingung $S = \alpha P$ auf einen Freiheitsgrad α reduziert. Auch im totzeitabhängigen

Fall ergeben sich die Razumikhin-Stabilitätskriterien aus den Ljapunow-Krasovskii-Kriterien, wenn zusätzliche Nebenbedingungen erzwungen werden [Gu u. a. 2003]. Damit sind die Ergebnisse, die mit den aus dem Ljapunow-Krasovskii Theorem hergeleiteten Stabilitätskriterien erhalten wurden, näher an der exakten Lösung.

Die Stabilitätskriterien aus dem Razumikhin Theorem können dagegen auf zeitvariante Totzeiten $\tau = \tau(t)$ erweitert werden. Die Gleichung (5.4) gilt beispielsweise auch für Systeme mit zeitvarianten Totzeiten, d.h. für eine wesentlich größere Klasse von Systemen. Damit lässt sich auch der Konservatismus in den Stabilitätsaussagen verstehen. Im totzeitabhängigen Fall ergeben sich aus dem Razumikhin Theorem Kriterien für $\tau = \tau(t)$, $0 \leq \tau(t) \leq \tau_{max}$, die von der maximal auftretenden Totzeit τ_{max} abhängen [Gu u. a. 2003]. Sollen Ljapunow-Krasovskii-Kriterien auf zeitvariante Totzeiten $\tau = \tau(t)$, $0 \leq \tau(t) \leq \tau_{max}$ erweitert werden, muss die zusätzliche, einschränkende Bedingung $\dot{\tau} \leq \gamma < 1$ erfüllt sein [Niculescu 2001].

Ein großer Vorteil der Ljapunow-Krasovskii-Stabilitätskriterien ist, dass sich diese in Form von LMIs formulieren lassen. Für die Lösung von LMIs existieren effiziente numerische Algorithmen. LMIs sind linear in den unbekanntem, zu bestimmenden Variablen [Scherer und Weiland 2000]. In Gleichung (5.6) sind das die Matrizen P und S . Die Kriterien, die aus dem Razumikhin Theorem resultieren, können dagegen nicht durch LMIs dargestellt werden. Im totzeitunabhängigen Fall (Gleichung (5.4)) ist die Ungleichung von den Unbekannten (P, α) abhängig, die multiplikativ miteinander verknüpft sind. Um dieses Problem trotzdem zu lösen, werden für α konkrete Werte eingesetzt und das Stabilitätskriterium, das dann in LMI-Form vorliegt, untersucht. Über ein verallgemeinertes Eigenwertproblem kann eine obere Schranke $\bar{\alpha}$ bestimmt werden. Um das am wenigsten konservative Ergebnis zu erhalten, muss die Lösbarkeit der LMI für alle $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ untersucht werden. Da dies sehr aufwändig ist, wird α meist auf den Wert $\alpha = \bar{\alpha}/2$ festgelegt [Gu u. a. 2003] und der zusätzliche Konservatismus in Kauf genommen. Im totzeitabhängigen Fall ist eine (iterative) Festlegung von mehreren Parametern α_i notwendig, um das Stabilitätskriterium auf LMI-Form zu bringen. Mit den aus dem Ljapunow-Krasovskii Theorem resultierenden Kriterien sind Systeme demnach wesentlich einfacher zu untersuchen.

	Ljapunow-Krasovskii	Razumikhin
einfache Wahl von V	-	+
Konservatismus	+	-
Erweiterbarkeit auf $\tau = \tau(t)$	-	+
Stabilitätskriterien direkt in LMI-Form	+	-

Bewertung: „+“ (Vorteil), „-“ (Nachteil)

Tabelle 5.1: Vergleich: Ljapunow-Krasovskii – Razumikhin

Die erläuterten Unterschiede sind in Tabelle 5.1 übersichtlich zusammengestellt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass es für die Stabilitätsuntersuchung von Systemen mit konstanter Totzeit sinnvoll ist, sich auf Ljapunow-Krasovskii-Stabilitätskriterien zu stützen. Für zeitvariante Totzeiten $\tau = \tau(t)$ (Kapitel 9) bieten sich die aus dem Razumikhin Theorem hergeleiteten Kriterien an.

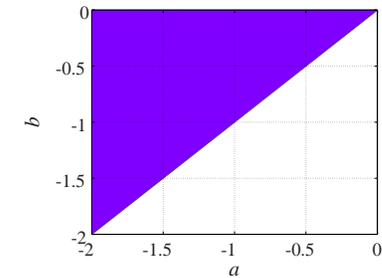


Abbildung 5.1: Exakter Stabilitätsbereich (dunkel eingefärbt)

5.4.2 Totzeitunabhängige Stabilitätskriterien

Die Aussagekraft der Stabilitätskriterien aus Kapitel 5.2 wird am Beispiel des 2×2 -Systems (3.7) untersucht. Das Stabilitätsverhalten des 2×2 -Systems wurde bereits im Frequenzbereich analysiert (Kapitel 4.3.2). Die dort aus notwendigen und hinreichenden Bedingungen gewonnenen Resultate dienen als Vergleich (Abbildung 5.1). Abbildung 5.2 zeigt die Stabilitätsbereiche die sich aus den Gleichungen (5.4) und (5.6) ergeben. Ein Punkt deutet eine stabile Parameterkombination (a, b) an. Die eingezeichnete Gerade kennzeichnet den „exakten“ Rand des Stabilitätsbereichs, den man mit Hilfe der Kriterien im Frequenzbereich erhält. Punkte auf dieser Geraden sind stabil.

Der Parameter α in Gleichung (5.4) wurde bei der Berechnung des Stabilitätsbereichs mit dem Razumikhin-Kriterium zu $\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{2}$ gewählt. $\bar{\alpha}$ erhält man aus einem verallgemeinerten Eigenwertproblem [Gu u. a. 2003].

Bemerkung 5.1.

Für den 2×2 -Fall kann das Razumikhin-Stabilitätskriterium (5.4) analytisch ausgewertet werden. Es ergibt sich der Stabilitätsbereich $a^2 > b^2$. Verglichen mit dem exakten Ergebnis $a^2 \geq b^2$ liefert das Razumikhin Theorem hier wenig konservative Ergebnisse.

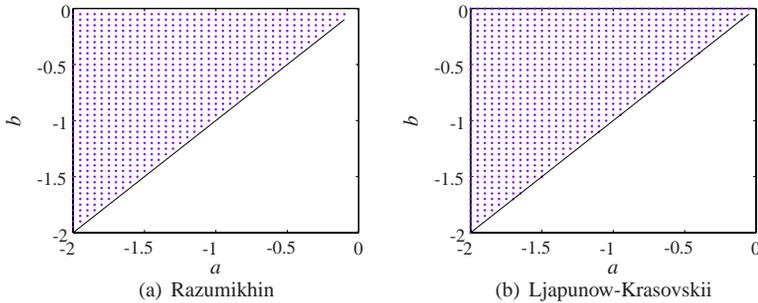


Abbildung 5.2: Totzeitunabhängiger Stabilitätsbereich

5.4.3 Totzeitabhängige Stabilitätskriterien

Die totzeitabhängigen Stabilitätskriterien bieten lediglich die Möglichkeit, die Stabilität eines Systems für eine bestimmte Totzeit $\tau = \tau_0$ zu untersuchen. Um den Bereich $[0, \bar{\tau})$ zu erhalten, in dem das System stabil ist, muss die kleinste Totzeit bestimmt werden, für die das System instabil wird. Dazu wurde ein Bisektionsverfahren verwendet. In den Beispielen, die in Abbildung 5.4 bis 5.8 zu sehen sind, ist die maximale Totzeit $\tau_{\max, u} = 4$. Größere Werte für τ wurden nicht untersucht.

Der Konservatismus der einzelnen Stabilitätskriterien wird durch Vergleich der Ergebnisse mit den „exakten“ Resultaten aus dem Frequenzbereich (Abbildung 5.3) deutlich. In Abbildung 5.3 ist $\bar{\tau}$ über dem Parameterbereich (a, b) dargestellt. Es ist ausreichend $b < 0$ zu betrachten (Satz 3.1). Um eine übersichtliche und anschauliche Abbildung zu erhalten, wurden alle Werte $\bar{\tau} \geq 4$ als $\bar{\tau} = 4$ dargestellt. Das heißt, auch der totzeitunabhängig stabile Bereich mit $\bar{\tau} = \infty$ ist in der Graphik durch $\bar{\tau} = 4$ dargestellt. Die Abbildungen 5.4 bis 5.8 zeigen auf der linken Seite das Ergebnis des jeweiligen Kriteriums. Auf der rechten Seite wurde die Differenz $\Delta\tau = \bar{\tau}_{\text{Stabilitätskriterium}} - \bar{\tau}_{\text{exakt}}$ aufgezeichnet. Für den totzeitunabhängig stabilen Bereich macht diese Differenz wenig Sinn. In diesem Bereich ($a^2 \geq b^2$) wurde jeweils ein konstanter, maximaler Wert für $\Delta\tau$ gewählt. Bei der Betrachtung der $\Delta\tau$ -Plots ist unbedingt auf die Größenordnung von $\Delta\tau$ zu achten (z -Achsenbeschriftung).

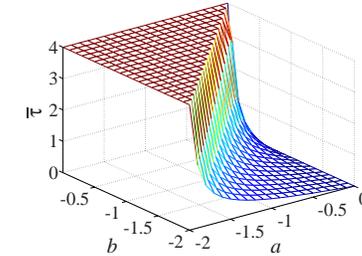


Abbildung 5.3: Stabilitätsverhalten des 2x2-Systems

Die Ergebnisse der expliziten Transformation (Abbildung 5.4, 5.5) sind sehr konservativ. Sie liefern selbst für den in Abbildung 5.2 dargestellten totzeitunabhängigen Stabilitätsbereich Werte für $\bar{\tau} < \infty$. Der Unterschied zwischen den Ljapunow-Krasovskii-Ergebnissen (Abbildung 5.5) und den Razumikhin-Resultaten (Abbildung 5.4) ist minimal.

Die mit Hilfe der expliziten Transformation hergeleiteten Ljapunow-Krasovskii-Stabilitätskriterien und ebenso die Razumikhin-Kriterien liefern für Parameterwerte $(a, b) : a < 0, b = 0$ totzeitunabhängige Stabilität, d.h. $\bar{\tau} = \infty$.

Die mittels impliziter Transformation erhaltenen Totzeiten $\bar{\tau}$ (Abbildung 5.6) sind verglichen mit den Resultaten der expliziten Transformation (Abbildung 5.4, 5.5) deutlich weniger konservativ. Für Parameterpaare (a, b) des totzeitunabhängigen Bereichs (Abbildung 5.2) bestätigen diese Stabilitätskriterien die totzeitunabhängige Stabilität (Kapitel 5.3.2) und liefern $\bar{\tau} = \infty$.

Die Bestimmung des Stabilitätsverhaltens über ein diskretisiertes Ljapunow-Funktional liefert die besten Ergebnisse. Je größer N gewählt wird, d.h. umso kleiner die Segmente gewählt werden, in die das Intervall $[0, \tau]$ unterteilt wird, umso genauer werden die Resultate. Dies ist besonders in der Nähe der Grenze des totzeitunabhängigen Stabilitätsbereichs $a = b$ erkennbar (Abbildung 5.7, 5.8). Für $N \rightarrow \infty$ konvergieren die Resultate ge-

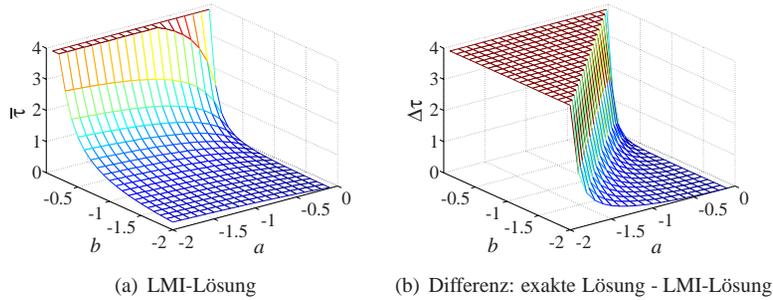


Abbildung 5.4: Explizite Transformation: Razumikhin

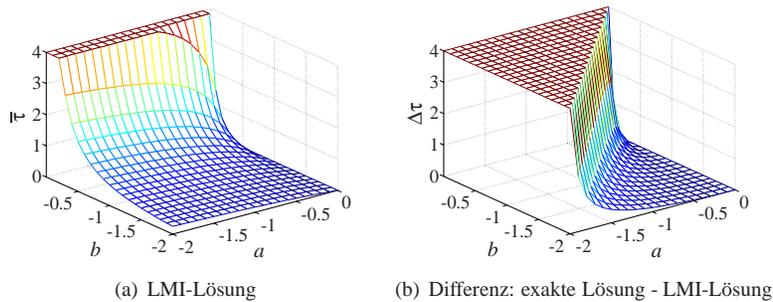


Abbildung 5.5: Explizite Transformation: Ljapunow-Krasovskii

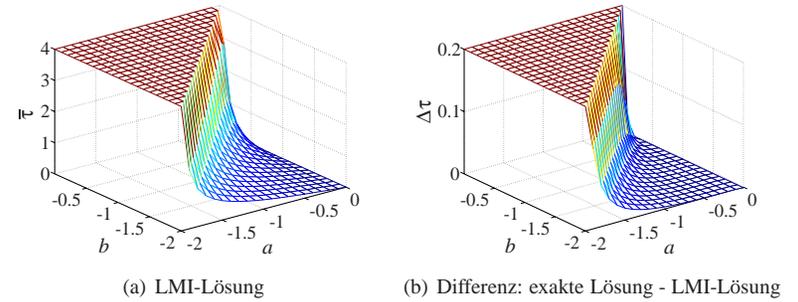


Abbildung 5.6: Implizite Transformation: Ljapunow-Krasovskii

	$\bar{\tau}$
explizite Transformation: Ljapunow-Krasovskii	0.322
explizite Transformation: Razumikhin	0.322
implizite Transformation: Ljapunow-Krasovskii	2.102
diskretisiertes Ljapunow-Funktional ($N = 1$)	2.233
diskretisiertes Ljapunow-Funktional ($N = 2$)	2.235
exakte Berechnung mit Gleichung (4.22)	2.235

Tabelle 5.2: Vergleich von $\bar{\tau}$ für die Parameterwerte $(a, b) = (-1.4, -1.5)$

gen die exakte Lösung. Die negativen Werte von $\Delta\tau$ in Abbildung 5.7(b), 5.7(b) für $a = 0$ resultieren aus numerischen Fehlern.

In Tabelle 5.2 werden für die Parameterwerte $(a, b) = (-1.4, -1.5)$ die Totzeiten $\bar{\tau}$ aus den einzelnen Stabilitätskriterien verglichen.

Der Unterschied der Stabilitätskriterien kann auch sehr schön an der symmetrischen 3-Knoten-Netz-Struktur (Kapitel 4.4.4, Abbildung 5.9) verdeutlicht werden. Entlang der Geraden $b = \frac{3}{4}a$ ist die Totzeit $\bar{\tau}$ der einzelnen Stabilitätskriterien in Abbildung 5.10 aufgezeichnet.

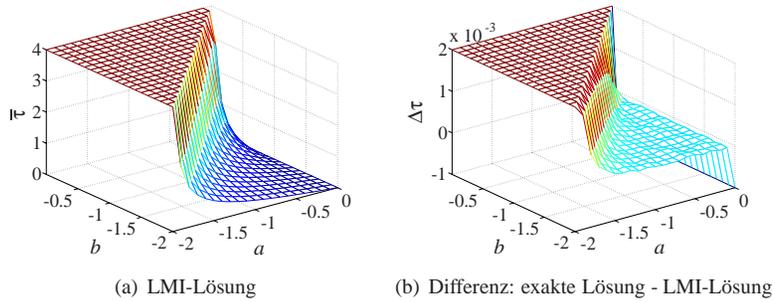


Abbildung 5.7: Diskretisiertes Ljapunow-Funktional: $N = 1$

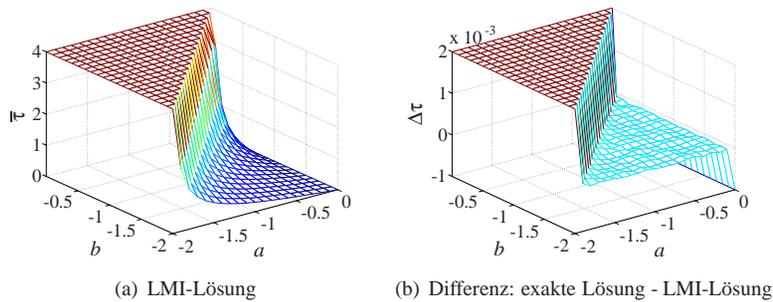


Abbildung 5.8: Diskretisiertes Ljapunow-Funktional: $N = 2$

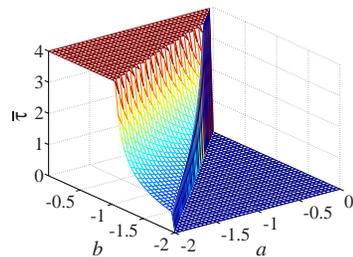


Abbildung 5.9: Symmetrische Netz-Struktur ($n = 3$): exaktes Ergebnis

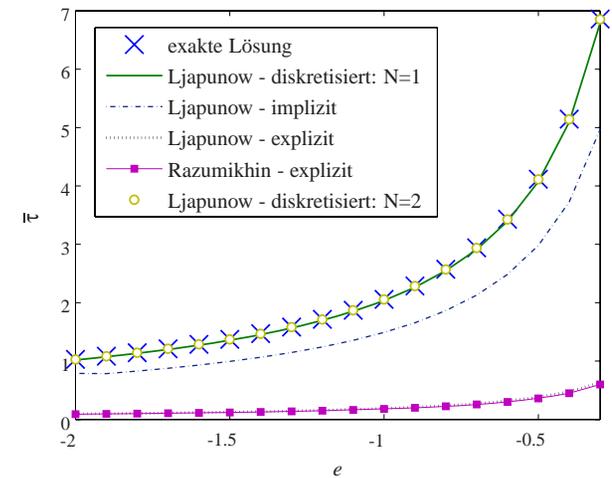


Abbildung 5.10: Symmetrische Netz-Struktur ($n = 3$): Vergleich entlang der Geraden $b = \frac{3}{4}a$

5.4.4 Tabellarische Übersicht

In Tabelle 5.3 werden die Stabilitätskriterien, die in den vorigen Kapiteln vorgestellt wurden, noch einmal gegenübergestellt. Es bietet sich an, die Eigenschaften der Kriterien mit den Ergebnissen im Frequenzbereich (Tabelle 4.9) zu vergleichen.

	L-K: totzeitunabhängig	R: totzeitunabhängig	L-K: totzeitabhängig - explizit	R: totzeitabhängig - explizit	L-K: totzeitabhängig - implizit	R: totzeitabhängig - implizit	L-K: diskretisiertes Funktional
notwendige und hinreichende Bed.	--	--	--	--	--	--	+*
direkte Aussage über totzeitunabh. Stabilität	++	++	--	--	--	--	--
Aussage über totzeitabhängige Stabilität	--	--	++	++	++	++	++
wenig konservative Aussagen	+	-	--	--	+	-	++
numerische Berechnung	++	+	++	-	++	--	++
allg. Aussagen in Abh. von Parametern	--	- [◊]	--	--	--	--	--
erweiterbar auf $\tau = \tau(t)$	- [◊]	++	- [◊]	++	- [◊]	++	- [◊]
erweiterbar auf <i>in-kommensurable</i> Totzeiten	++	++	++	++	++	++	++
erweiterbar auf Knoten mit DGIs höherer Ord.	++	++	++	++	++	++	++

Bewertung: „++“ (gut möglich/erfüllt) bis „-“ (nicht geeignet/nicht erfüllt).

* durch Approximation des Funktionals nur im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ erfüllt

◊ für den einfachen 2x2-Fall möglich

◊ zusätzliche Bedingung $\dot{\tau} \leq \gamma < 1$ nötig

Tabelle 5.3: Vergleich der Analysemethoden im Zeitbereich

Zeitbereich	Frequenzbereich
liefert hinreichende Bedingungen	liefert notwendige und hinreichende Bedingungen
nur numerische Berechnung möglich	allgemeine, parameterabhängige Stabilitätsaussagen für das Netzwerk-Modell (3.8) möglich
aus dem Razumikhin Theorem hergeleitete Kriterien einfach auf zeitvariante Totzeiten $\tau = \tau(t)$ erweiterbar, bei Ljapunow-Krasovskii-Kriterien zusätzliche Annahme $\tau \leq \gamma < 1$ nötig	vorgestellte Ansätze nicht auf zeitvariante Totzeiten $\tau = \tau(t)$ erweiterbar; Untersuchung mit anderen hinreichenden Stabilitätsbedingungen (z.B. mit Small-Gain-Ansätzen) möglich
$\bar{\tau}$ aus totzeitabhängigen Stabilitätskriterien durch Bisektionsverfahren, $\bar{\tau}$ kann nicht direkt berechnet werden	$\bar{\tau}$ ist das Minimum einer endlichen Anzahl von τ_i
auf mehrere inkommensurable Totzeiten erweiterbar	nur auf kommensurable Totzeiten erweiterbar, für inkommensurable Totzeiten existieren nur hinreichende Bedingungen

Tabelle 6.1: Vergleich der Stabilitätsanalyse im Zeit- und Frequenzbereich

Kapitel 6

Vergleich: Frequenzbereich – Zeitbereich

In den beiden vorangegangenen Kapiteln wurde die Stabilität von Netzwerken sowohl im Zeitbereich, als auch im Frequenzbereich analysiert. In Tabelle 6.1 werden die Unterschiede, die besonders bei der Untersuchung von vernetzten Systemen eine Rolle spielen, stichwortartig zusammengefasst.

Kapitel 7

Simulation

In Kapitel 4.4 wurden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Stabilität eines n -Knoten-Netzwerks hergeleitet. Mit diesen Ergebnissen konnte das Stabilitätsverhalten für die in Kapitel 3.5 vorgestellten Beispielverknüpfungen bestimmt werden. Die Resultate, die sich hier ergeben, können durch Simulationen bestätigt werden.

Beispielhaft wird das Verhalten des 2×2 -Systems (3.7) mit SIMULINK simuliert (Abbildung 3.1). Betrachtet wird der Fall $(a, b) = (-1, -1.5)$. Die Grenze $\bar{\tau}$ des Stabilitätsbereichs $[0, \bar{\tau})$ kann mit Gleichung (4.22) berechnet werden. Es ergibt sich (gerundet auf drei Nachkommastellen) $\bar{\tau} = 0.653$. Die Simulation bestätigt dieses Ergebnis mit einer Genauigkeit von 0.01. In Abbildung 7.1 ist der Verlauf der Zustände für den Wert $\bar{\tau} = 0.65$ dargestellt. Als Anfangsbedingung wurde $(x_1, x_2) = (1, 1)$ gewählt. Das 2-Knoten-Netzwerk ist für diese Totzeit stabil. Für $\bar{\tau} = 0.66$ ist das System instabil (Abbildung 7.2). Simulationsergebnisse dieser Genauigkeit ergeben sich auch für die anderen Parameterwerte (a, b) .

In analoger Weise können die theoretischen Ergebnisse (Kapitel 4.4.4) für die Beispielverknüpfungen aus Kapitel 3.5 durch Simulationen bestätigt werden.

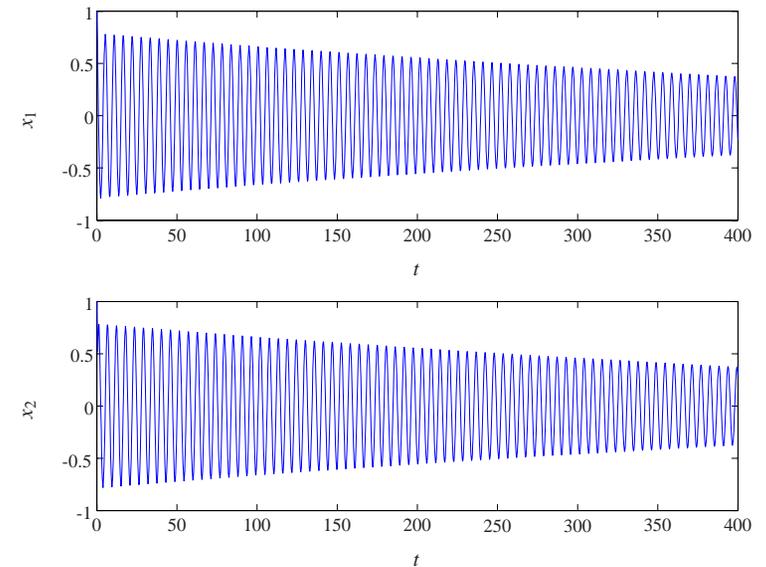


Abbildung 7.1: Verhalten des 2×2 -Systems mit $(a, b) = (-1, -1.5)$ und $\tau = 0.65$.

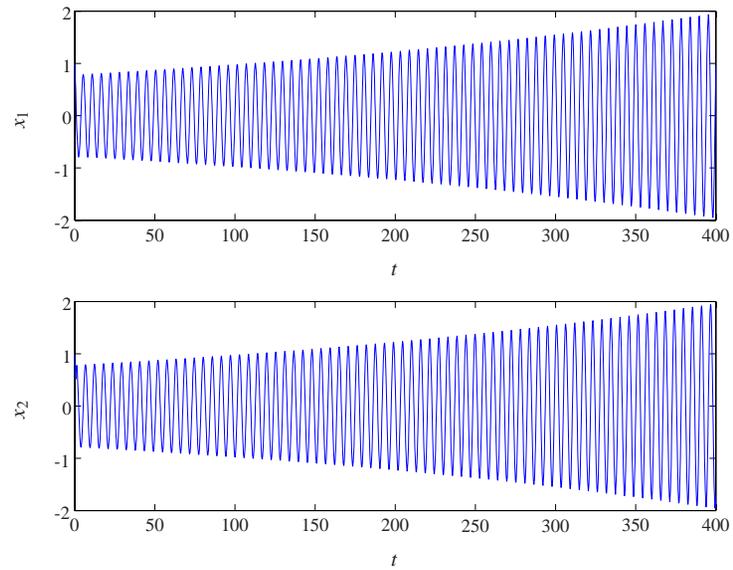


Abbildung 7.2: Verhalten des 2×2 -Systems mit $(a, b) = (-1, -1.5)$ und $\tau = 0.66$

Kapitel 8

Stabilität von Systemen mit varianter Totzeit im Frequenzbereich

In diesem Kapitel werden zeitvariante Totzeiten betrachtet. Dabei wird zwischen Totzeiten, deren zeitlicher Verlauf bekannt ist, und unbekannt varianter Totzeiten unterschieden. Durch eine Erweiterung des Frequency-Sweeping-Tests ergeben sich für schnell variierende, periodische Totzeiten allgemeine, parameterabhängige Aussagen.

Zuerst werden in Kapitel 8.1 Stabilitätskriterien für Netzwerke mit schnell variierender, periodischer Totzeit hergeleitet. Kapitel 8.2 liefert eine Übersicht über Stabilitätskriterien für den Fall, dass der zeitliche Verlauf der Totzeit unbekannt ist.

8.1 Schnell variierende, periodische Totzeiten

8.1.1 Idee

In vielen Veröffentlichungen werden zeitvariante Totzeiten als *Unsicherheiten* oder *Störungen* betrachtet [Niculescu u. a. 1998], [Gu u. a. 2003], [Kharitonov und Niculescu 2002]. Ausgangspunkt ist in diesem Fall ein

für $\tau = 0$ stabiles System. Für die variierende Totzeit $\tau(t)$ und/oder für die zeitliche Änderung der Totzeit $\dot{\tau}(t)$ werden obere und untere Grenzen berechnet, so dass die Stabilität des Systems auch unter der varianten Totzeit garantiert werden kann (Kapitel 9).

In [Michiels u. a. 2005] wird ein neuer Ansatz verfolgt. Die zeitvariable Totzeit wird gezielt eingesetzt, um den *Stabilitätsbereich* eines Systems zu *vergrößern*. Dazu wird eine Totzeit

$$\tau(t) = \tau_0 + \delta f(\Omega t) \quad (8.1)$$

gewählt, die hochfrequent um die konstante Totzeit τ_0 variiert. f ist eine 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ mit Mittelwert 0 und Frequenz Ω . Es ist $\max f = 1$ und $\min f = -1$. Der Parameter δ bestimmt die Amplitude der Schwingung.

Von Interesse ist der Vergleich der Stabilität des Systems

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau(t)), \quad \tau(t) = \tau_0 + \delta f(\Omega t) \quad (8.2)$$

mit dem System

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_0). \quad (8.3)$$

Es kann erreicht werden, dass ein mit konstanter Totzeit τ_0 instabiles System (8.3) durch Variation der Totzeit (8.1) stabilisiert wird.

Der wesentliche Schritt in [Michiels u. a. 2005] ist, die Stabilität von (8.2) über ein *zeitinvariantes Vergleichssystem mit verteilter Totzeit* zu untersuchen. Aus der asymptotischen Stabilität des zeitinvarianten Vergleichssystems

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 \int_{t-\tau_0-\delta}^{t-\tau_0+\delta} \frac{w((\theta - t + \tau_0)/\delta)}{\delta} x(\theta) d\theta, \quad \delta \leq \tau_0 \quad (8.4)$$

mit $w: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ aus

$$\int_{-1}^1 \alpha(t) w(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(f(t)) dt, \quad \forall \alpha: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (8.5)$$

folgt, dass das ursprüngliche System (8.2) für große Werte von Ω asymptotisch stabil ist.

Ein großer Vorteil ist, dass dieses zeitinvariante System im Frequenzbereich untersucht werden kann. Die Stabilität wird durch Berechnung der Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\det[sI - A_0 - A_1 e^{s\tau_0} g(s\delta)] = 0, \quad g(s) = \int_{-1}^1 e^{st} w(t) dt \quad (8.6)$$

bestimmt.

Für nähere Erläuterungen wird auf [Michiels u. a. 2005] verwiesen. Unter anderem werden dort Beispiele für Funktionen f und die zugehörigen Funktionen w und g angegeben. Außerdem werden einige wichtige Eigenschaften von w und g hergeleitet.

8.1.2 Erweiterung des Frequency-Sweeping-Tests

Um die Stabilität des Vergleichssystems zu bestimmen, werden in [Michiels u. a. 2005] die Nullstellen der charakteristischen Gleichung (8.6) numerisch berechnet. In diesem Kapitel wird eine Erweiterung des Frequency-Sweeping-Tests aus Kapitel 4.4 vorgestellt, die qualitative und quantitative Aussagen in Abhängigkeit der Parameter a und b des Systems (3.8) zulässt.

a. Totzeitunabhängige Stabilität

Das Theorem 4.1 kann folgendermaßen auf Systeme der Form (8.4) erweitert werden:

Satz 8.1.

Das System (8.4) mit $\delta \leq \tau_0$ ist genau dann unabhängig von τ_0 stabil, wenn

- (i) A_0 stabil ist,
- (ii) $A_0 + A_1$ stabil ist und
- (iii) $\rho \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta) \right] < 1, \quad \forall \omega \neq 0.$

Der Beweis ist in Anhang C.1 nachzulesen.

Wie in Kapitel 4.4.2 können die allgemeinen Stabilitätsbedingungen (Satz 8.1) für das Netzwerk-Modell (3.8) ausgewertet werden. Bedingung (i) und (ii) sind dabei identisch zu (4.32), (4.33). Aus Bedingung (iii) ergibt sich

$$\frac{1}{|j\omega - a|} |b| |g(j\omega)| \rho(C) < 1$$

$$b^2 |g(j\omega)|^2 \rho^2(C) < \omega^2 + a^2, \quad \forall \omega \neq 0. \quad (8.7)$$

Mit den Eigenschaften der Funktion g [Michiels u. a. 2005]

$$|g(j\omega)| \leq 1 \quad \text{und} \quad g(0) = 1 \quad (8.8)$$

vereinfacht sich (8.7) zu

$$b^2 \rho^2(C) \leq a^2. \quad (8.9)$$

Für das Netzwerk-Modell lässt sich zusammenfassen:

Satz 8.2.

Das Vergleichssystem (8.4) $\delta \leq \tau_0$ für das Netzwerk-Modell (3.8) mit $A_0 = aI$, $A_1 = bC$ ist genau dann unabhängig von τ_0 stabil, wenn

- (i) $a < 0$,
- (ii) $a + b \operatorname{Re}[\lambda_i(C)] < 0$ und
- (iii) $b^2 \rho^2(C) \leq a^2$.

Der totzeitunabhängig stabile Parameterbereich (a, b) des Netzwerk-Systems mit varianter Totzeit (8.1) entspricht dem totzeitunabhängig stabilen Parameterbereich des Systems mit konstanter Totzeit.

Bemerkung 8.1.

Das Ergebnis kann im 2×2 -Fall mit dem aus dem Razumikhin Theorem hergeleiteten totzeitunabhängigen Stabilitätsbereich verglichen werden (Bemerkung 5.1). Satz 8.2 liefert den Bereich $a \geq b$, das Razumikhin Theorem $a > b$. Wird berücksichtigt, dass das Razumikhin-Stabilitätskriterium ein hinreichendes Kriterium ist und für beliebige zeitvariante Totzeiten $\tau(t)$ gilt (Kapitel 5.4.1), ist das in diesem Kapitel erhaltene Ergebnis plausibel.

b. Totzeitabhängige Stabilität

Auch im totzeitabhängigen Fall lassen sich die Ergebnisse aus Kapitel 4.4 erweitern.

Satz 8.3.

Das Vergleichssystem (8.4) sei stabil für $\tau_0 = \delta = 0$ und die Matrix $(j\omega I - A_0)$ mit $\omega \neq 0$ sei invertierbar. Gegeben sei $\delta = \delta^*$ mit $0 \leq \delta^* \leq \tau_0$.

Mit $\theta = \omega\tau_0$ wird

$$\bar{\tau}_{0,i} := \begin{cases} \min \frac{\theta_k^i}{\omega_k^i} & \text{wenn } \lambda_i \left[(j\omega_k^i I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega_k^i \delta^*) \right] = e^{j\theta_k^i} \\ & \text{für } \omega_k^i \neq 0, \theta_k^i \in [0, 2\pi] \\ \infty & \text{wenn } \rho \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega \delta^*) \right] < 1, \\ & \forall \omega \neq 0. \end{cases} \quad (8.10)$$

und

$$\bar{\tau}_0 := \min_{1 \leq i \leq n} \bar{\tau}_{0,i} \quad (8.11)$$

definiert.

Das System (4.28) ist stabil für $\tau_0 \in [0, \bar{\tau})$. Es wird instabil für $\tau_0 = \bar{\tau}_0$.

Der Beweis hierzu befindet sich im Anhang C.2.

Für das Netzwerk-Modell (3.8) werden die Frequenzen ω_k^i aus

$$\left| \lambda_i \left[(j\omega_k^i I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega_k^i \delta^*) \right] \right| = 1$$

berechnet. Mit $A_0 = aI$, $A_1 = bC$ ergibt sich die Bestimmungsformel

$$|b| |\lambda_i(C)| |g(j\omega_k^i \delta^*)| = \sqrt{(\omega_k^i)^2 + a^2}, \quad \omega \neq 0. \quad (8.12)$$

In dieser nichtlinearen Gleichung kann ein Eigenwert λ_i zu mehreren Lösungen ω_k^i führen. In Kapitel 8.1.3. wird das an einem konkreten Beispiel deutlich. Im Gegensatz dazu konnte im Fall einer konstanten

Totzeit zu jedem λ_i genau ein ω_i berechnet werden.

Die Annahme, dass das System für $\tau_0 = \delta = 0$ stabil ist, führt wie im totzeitunabhängigen Fall auf die Bedingung

$$a + b \operatorname{Re}[\lambda_i(C)] < 0. \quad (8.13)$$

Die Totzeit $\tau_{k,0}^i$ bestimmt sich aus

$$\tau_{k,0}^i \omega_k^i = \arg \left[g(j\omega_k^i \delta^*) \lambda_i(C) \frac{b}{j\omega_k^i - a} \right]. \quad (8.14)$$

Mit den Bedingungen (8.12)-(8.14) kann der folgende Satz formuliert werden:

Satz 8.4.

Das Vergleichssystem (8.4) für das Netzwerk-Modell (3.8) mit $\delta = \delta^* \leq \tau_0$ ist genau dann totzeitabhängig stabil, wenn

$$(i) \quad a + b \operatorname{Re}[\lambda_k(C)] < 0 \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n\} \quad \text{und}$$

$$(ii) \quad b^2 |\lambda_k(C)|^2 > a^2 \quad \text{für mindestens ein } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Im totzeitabhängigen Parameterbereich (a, b) ist das System (8.4) stabil für alle $\tau_0 \in [0, \bar{\tau}_0)$ mit

$$\bar{\tau}_0 = \min_{k,i} \left\{ \frac{1}{\omega_k^i} \arg \left[g(j\omega_k^i \delta^*) \lambda_i(C) \frac{b}{j\omega_k^i - a} \right] \right\} \quad (8.15)$$

und ω_k^i aus

$$|g(j\omega_k^i \delta^*)| = \frac{\sqrt{(\omega_k^i)^2 + a^2}}{|b| |\lambda_i(C)|}, \quad \omega \neq 0. \quad (8.16)$$

Für $\tau_0 = \bar{\tau}_0$ wird das System instabil.

Man beachte, dass der totzeitabhängig stabile Parameterbereich (a, b) des Netzwerk-Systems mit varianter Totzeit (8.1) dem totzeitabhängig stabilen Parameterbereich des Systems mit konstanter Totzeit entspricht. Lediglich der Stabilitätsbereich $[0, \bar{\tau}_0)$ ändert sich.

Für ein System, das für konstante Totzeiten *totzeitabhängig stabil* ist, bedeutet das, dass durch die hochfrequente Variation der Totzeit der Stabilitätsbereich $[0, \bar{\tau}_0)$ vergrößert werden kann. Dies wird im nächsten Kapitel deutlich.

Bemerkung 8.2.

Die Funktion $w(t)$, die aus Gleichung (8.5) bestimmt wird, ist abhängig von der Schwingung $f(\Omega t)$. Sie kann als *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der Funktionswerte von f interpretiert werden. Aus diesem Grund ist die Funktion $w(t)$ in vielen Fällen gerade, d.h. $w(t) = w(-t)$. Für eine gerade Funktion $w(t)$ nimmt die Funktion $g(j\omega)$ (aus Gleichung 8.6) *nur reelle* Werte an [Michiels u. a. 2005]. In der Herleitung der oben angeführten Sätze treten dann ausschließlich Quasipolynome mit reellen Koeffizienten auf. Aus Gleichung (4.3) und den Anmerkungen zu dieser Gleichung folgt, dass es in diesem Fall ausreicht $\omega > 0$ zu betrachten. Zusammengefasst heißt das: Für gerade Funktionen $w(t)$ kann in den Sätzen 8.1 bis 8.4 $\omega \neq 0$ durch $\omega > 0$ ersetzt werden.

8.1.3 Die schiefsymmetrische Verknüpfungsmatrix

In diesem Abschnitt wird ein Netzwerk der Form (3.8) mit schiefsymmetrischer Verknüpfungsmatrix C betrachtet. Anhand dieses Beispiels soll gezeigt werden, welche Aussagen die obigen Sätze für Netzwerke mit varianten Zeitverzögerungen liefern. Der totzeitabhängig stabile Parameterbereich ist für schiefsymmetrische Verknüpfungsmatrizen groß (Abbildung 4.8), so dass in diesem Fall der Einfluss der varianten Totzeit gut zu untersuchen ist.

Für die Schwingung $f(\Omega t)$ wurde eine *Rechteckschwingung* der Form

$$f(\Omega t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, \frac{\pi}{\Omega}) \\ -1 & \text{für } t \in [\frac{\pi}{\Omega}, \frac{2\pi}{\Omega}) \end{cases} \quad (8.17)$$

gewählt. Für diese Schwingung ist nach [Michiels u. a. 2005]

$$g(j\omega\delta) = \cosh(j\omega\delta) = \cos(\omega\delta). \quad (8.18)$$

Die Funktion $g(j\omega\delta)$ nimmt *nur reelle Werte* an. Das vereinfacht die weiteren Untersuchungen (Bemerkung 8.2).

Die Totzeit $\bar{\tau}_0$ berechnet sich nach Gleichung (8.15). Die Eigenwerte der reellen Matrix $C = -C^T$ sind dabei rein imaginär und konjugiert komplex. Wird außerdem beachtet, dass der Parameter a im totzeitabhängigen Bereich negativ ist (Abbildung 4.8) und $g(j\omega\delta) \in \mathbb{R}$ gilt, erhält man

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_0 &= \min_{k,i} \left\{ \frac{1}{\omega_k^i} \arg \left[-g(j\omega_k^i \delta^*) \lambda_i(C) \frac{b(j\omega_k^i + a)}{(\omega_k^i)^2 + a^2} \right] \right\} \\ &= \min_{k,i} \left\{ \frac{1}{\omega_k^i} \left(\arctan \left(\frac{\omega_k^i}{a} \right) + \pi \pm \frac{\pi}{2} \right) \right\}, \quad \omega_k^i > 0. \end{aligned}$$

In Abhängigkeit des Vorzeichens von $\{g(j\omega_k^i \delta^*) \operatorname{Im}[\lambda_i(C)] b\}$ wird $\pi/2$ addiert oder subtrahiert. Um das Minimum $\bar{\tau}_0$ zu erhalten, wird das Vorzeichen von $\operatorname{Im}[\lambda_i(C)]$ so gewählt, dass $\pi/2$ subtrahiert wird. Für die Totzeit $\bar{\tau}_0$ ergibt sich schließlich

$$\bar{\tau}_0 = \frac{1}{\omega_{max}} \left[\arctan \left(\frac{\omega_{max}}{a} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (8.19)$$

mit ω_{max} aus

$$\omega_{max} = \max_{k,i} \left\{ \omega_k^i > 0 \left| \underbrace{|\cos(\omega_k^i \delta^*)|}_{f_L} = \underbrace{\frac{\sqrt{(\omega_k^i)^2 + a^2}}{|b| |\lambda_i(C)|}}_{f_R} \right. \right\}. \quad (8.20)$$

Die rechte und linke Seite (f_R bzw. f_L) der Bestimmungsgleichung für ω_{max} ist in Abbildung 8.1 graphisch dargestellt. Um ω_{max} zu erhalten, ist es ausreichend den betragsmäßig größten Eigenwert $\lambda(C)$ zu betrachten. Für diesen Eigenwert ist die Steigung von $f_R(\omega)$ und der Punkt $f_R(0)$ am kleinsten. Gleichung (8.20) lautet dann

$$\omega_{max} = \max_k \left\{ \omega_k > 0 \left| |\cos(\omega_k \delta^*)| = \frac{\sqrt{(\omega_k)^2 + a^2}}{|b| \rho(C)} \right. \right\}. \quad (8.21)$$

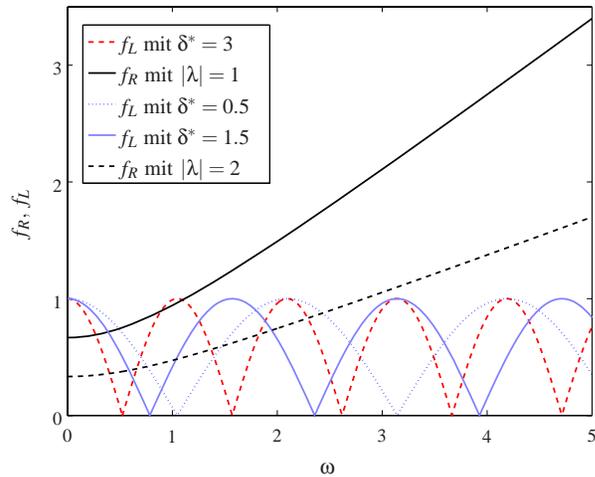


Abbildung 8.1: Rechte und linke Seite der Bestimmungsgleichung für ω_{max} mit $a = -1$, $b = -1.5$

Bemerkung 8.3.

Im totzeitabhängig stabilen Parameterbereich (a, b) erhält man immer einen Schnittpunkt von f_L und f_R . In diesem Parameterbereich gilt

$$\frac{|a|}{|b|\rho(C)} < 1.$$

Für $\omega = 0$ ist damit $f_R(\omega = 0) < 1$ und die monoton steigende Funktion $f_R(\omega)$ schneidet für ein $\omega > 0$ die Funktion $f_L(\omega)$.

Bemerkung 8.4.

Ist $\delta^* = 0$, dann ergeben sich für $\bar{\tau}_0$ aus (8.19) und (8.21) die selben Bestimmungsgleichungen wie in Kapitel 4.4.4 (konstante Totzeiten) für $\bar{\tau}$.

Mit Gleichung (8.19) und (8.21) lassen sich für festes δ^* qualitative Aussagen über $\bar{\tau}_0$ machen:

$$\left. \begin{array}{l} \rho(C) \text{ nimmt zu} \\ \text{oder } |b| \text{ nimmt zu} \\ \text{oder } |a| \text{ nimmt ab} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_{max} \text{ nimmt zu} \Rightarrow \bar{\tau}_0 \text{ nimmt ab.} \quad (8.22)$$

Die gleichen Aussagen ergeben sich auch für den Fall einer konstanten Totzeit (Kapitel 4.4.4, Abbildung 4.9 und 4.10). Das heißt, im Parameterbereich (a, b) verhalten sich die betrachteten Systeme mit konstanter Totzeit und mit varianter Totzeit für festes δ^* qualitativ gleich.

Der Zusammenhang zwischen δ^* und $\bar{\tau}_0$ ist dagegen komplexer. Hilfreich für das Verständnis ist folgende Überlegung: Die linke Seite $f_L = |\cos(\omega\delta^*)|$ wird für

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2\delta^*}$$

zum ersten Mal null. Wird $\tilde{\omega}$ in Gleichung (8.19) eingesetzt, dann ergibt sich

$$\bar{\tau}_0 = \delta^* + \underbrace{\frac{2\delta^*}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi}{2\delta^*a}\right)}_{<0, \text{ da } a < 0}.$$

Für $\tilde{\omega}$ ist $\bar{\tau}_0 < \delta^*$. Für $\omega_{max} > \tilde{\omega}$ gilt wegen des Zusammenhangs zwischen ω_{max} und $\bar{\tau}_0$ (Gleichung 8.22), dass ebenfalls $\bar{\tau}_0 < \delta^*$ ist. Die Frequenz ω_{max} ist dabei abhängig von den Parametern a , b , $\rho(C)$ und δ^* .

Zusammengefasst heißt das: Für $\omega_{max} \geq \tilde{\omega}$ existiert für ein gegebenes δ^* kein „sinnvolles“ $\bar{\tau}_0 \geq \delta^*$ und damit ist das Parameterpaar (a, b) für dieses δ^* instabil.

Beispielhaft wird das 2x2-System (Kapitel 3.2) betrachtet. In Abbildung 8.2 ist die Totzeit $\bar{\tau}_0$ in Abhängigkeit von δ^* für verschiedene Parameterwerte (a, b) dargestellt. Die Kurven $\bar{\tau}_0(\delta^*)$ wurden nicht über den ganzen Bereich $\delta^* \in [0, 5.8)$ berechnet. Die Berechnung wurde abgebrochen, wenn deutlich wurde, dass das Parameterpaar (a, b) für größere Werte δ^* nicht mehr stabil wird, d.h. $\omega_{max} > \tilde{\omega}$. In diesem Fall ergibt sich aus der Berechnung $\bar{\tau}_0 < \delta^*$.

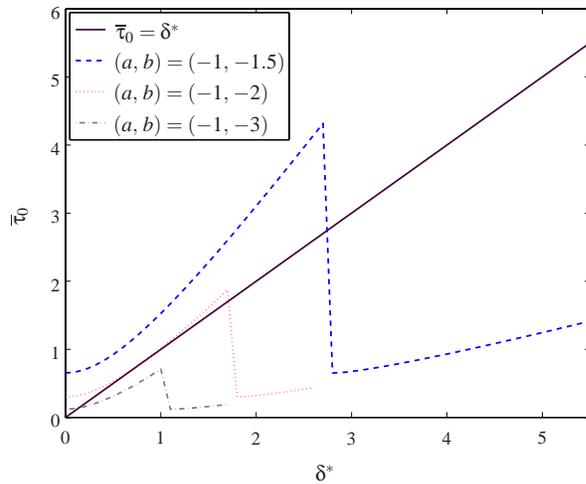
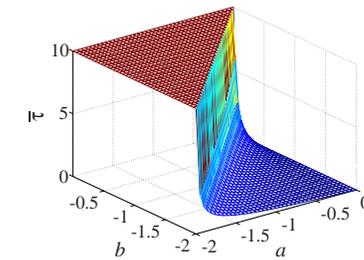


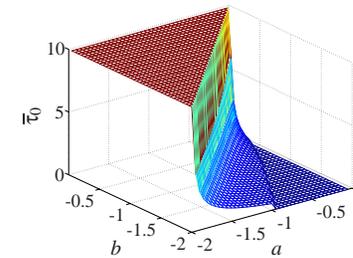
Abbildung 8.2: Totzeit $\bar{\tau}_0(\delta^*)$ für verschiedene Werte (a, b)

Das Phänomen, dass beispielsweise das Parameterpaar $(a, b) = (-1, -1.5)$ für Werte von $\delta^* \geq 2.8$ instabil ist ($\omega_{max} > \tilde{\omega}$) und für kleinere Werte δ^* stabil (Abbildung 8.2), wird auch in der Simulation (Kapitel 8.1.4) noch einmal untersucht.

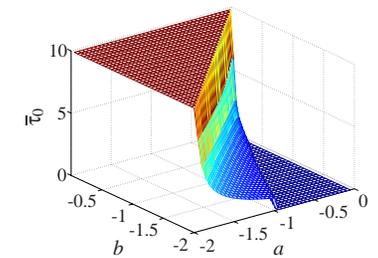
Betrachtet man das 2×2 -System (Kapitel 3.2) im Parameterbereich $(a, b) \in [-2, 0] \times [-2, 0]$, dann gilt $\omega_{max} < \tilde{\omega}$ für alle Werte (a, b) , wenn für die Amplitude $\delta_1^* = 0.5$ oder $\delta_2^* = 1$ gewählt wird. In Abbildung 8.3 ist für dieses System $\bar{\tau}_0$ für verschiedene Werte δ^* dargestellt. Es wird deutlich, dass für größer werdende Amplitude δ^* die Totzeit $\bar{\tau}_0$ größer gewählt werden kann. In Tabelle 8.1 wird dieser Zusammenhang für das Parameterpaar $(a, b) = (-1.2, -1.5)$ mit Zahlenwerten belegt. Allerdings zeigt Abbildung 8.3 auch, dass für größer werdende Amplitude δ^* Parameterpaare (a, b) instabil werden. In diesem Fall ist $\bar{\tau}_0 < \delta^*$. In Abbildung 8.2 lässt sich dieser Zusammenhang am Parameterpaar $(a, b) = (-1, -3)$ erkennen.



(a) $\delta^* = 0$



(b) $\delta_1^* = 0.5$



(c) $\delta_2^* = 1$

Abbildung 8.3: Totzeit $\bar{\tau}_0$ des 2×2 -Systems (3.7) für verschiedene Werte δ^*

δ^*	$\bar{\tau}_0$
0	1.03
0.5	1.415
1	2.265

Tabelle 8.1: Totzeit $\bar{\tau}_0(\delta^*)$ für das 2×2 -System (3.7) mit $(a, b) = (-1.2, -1.5)$

8.1.4 Simulation

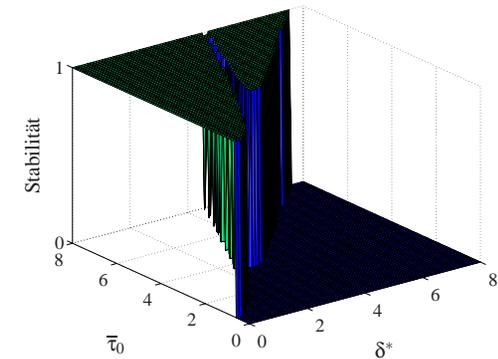
Mit SIMULINK wird das Verhalten des 2×2 -Systems (Kapitel 3.2) simuliert. Für die Schwingung $f(\Omega t)$ wird die Rechteckschwingung (8.17) gewählt. In allen Simulationen (Abbildung 8.4 bis 8.6) ist die Frequenz $\Omega = 40$. Untersucht werden soll die Stabilität für verschiedene Parameterpaare (a, b) in Abhängigkeit von δ^* und $\bar{\tau}_0$. Dazu wird der Parameterbereich $(\delta^*, \bar{\tau}_0)$ mit $\bar{\tau}_0 \geq \delta^*$ durchlaufen und das System für das entsprechende Paar $(\delta^*, \bar{\tau}_0)$ auf Stabilität untersucht. Dazu wurden die Anfangsbedingung $x = (1, 1)$ gewählt und der Wert

$$L = \max_t \{x_1(t)\}, \quad t = 901 : 1 : 1000$$

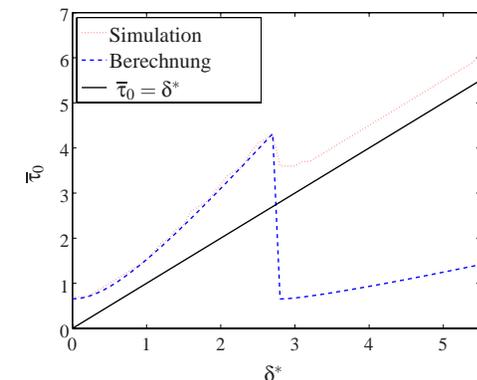
berechnet. Das System wurde für $L > 1$ als „instabil“ klassifiziert, ansonsten als „stabil“. Der Parameterbereich $(\delta^*, \bar{\tau}_0)$ wurde mit einer Schrittweite von 0.1 diskretisiert.

Abbildung 8.4(a), 8.5(a) und 8.6(a) zeigen die Ergebnisse für die System-Parameter $(a, b) = (-1, -1.5)$, $(a, b) = (-1, -2)$ bzw. $(a, b) = (-1, -3)$. In den Darstellungen steht der Wert „1“ für „instabil“ und „0“ für „stabil“. Für die Werte $\bar{\tau}_0 < \delta^*$, die nicht realisierbar sind, wurde der Wert auf „0“ gesetzt. Es ist wichtig zu beachten, dass im Gegensatz zu den Abbildungen in den vorigen Kapiteln der größere Wert „1“ für Instabilität steht.

In Abbildung 8.4(b), 8.5(b) und 8.6(b) werden die Simulationsergebnisse mit den berechneten Ergebnissen verglichen. Dargestellt sind jeweils die Werte $\bar{\tau}_0$, für die das System instabil wird. Unbedingt zu beachten ist, dass bei den simulierten Ergebnissen mit einer Schrittweite von 0.1 diskretisiert wurde. Die Diskretisierung bestimmt die Genauigkeit der Simulationsergebnisse. Die Resultate der Simulation stimmen für kleine Werte δ^* sehr exakt mit der Berechnung überein. Für größere Werte δ^* sind die theoretischen Resultate teilweise konservativ. Dies ist zum Beispiel in Abbildung 8.4(b) für $\delta^* > 3$ zu sehen. Da die Stabilitätskriterien aufgrund des Übergangs von zeitvarianten Totzeiten auf verteilte Totzeiten (Kapitel 8.1, Gleichung 8.2 und 8.4) nur hinreichend sind, lässt sich der Konservatismus damit erklären. Allerdings kann auch die numerische Simulation besonders für größere Werte für δ^* zu Fehlern führen und Ergebnisse liefern, die nicht der Realität entsprechen. Ob dies der Fall ist, muss noch untersucht werden.

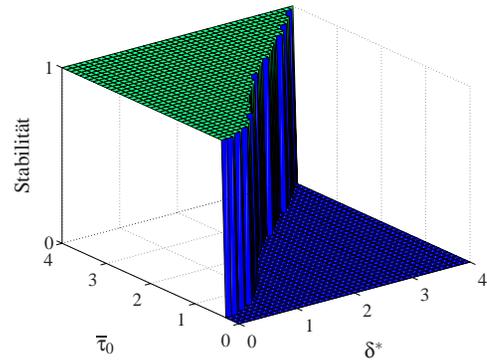


(a) Simulierter Stabilitätsbereich

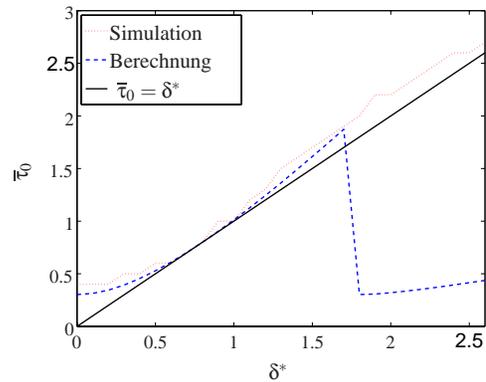


(b) Vergleich: Berechnung – Simulation

Abbildung 8.4: Stabilität des 2×2 -Systems (3.7) mit $(a, b) = (-1, -1.5)$

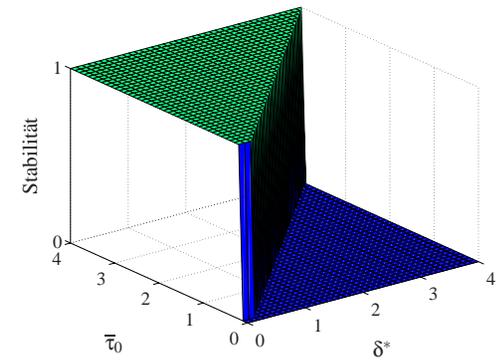


(a) Simulierter Stabilitätsbereich

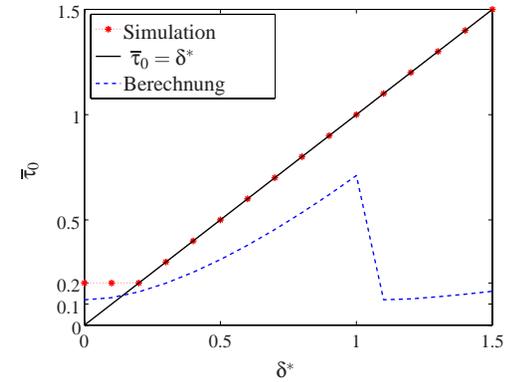


(b) Vergleich: Berechnung – Simulation

Abbildung 8.5: Stabilität des 2x2-Systems (3.7) mit $(a, b) = (-1, -2)$



(a) Simulierter Stabilitätsbereich



(b) Vergleich: Berechnung – Simulation

Abbildung 8.6: Stabilität des 2x2-Systems (3.7) mit $(a, b) = (-1, -3)$

8.1.5 Bewertung der Ergebnisse und Ausblick

In [Michiels u. a. 2005] wird die Stabilität eines Systems (8.2) *numerisch* bestimmt. Für die Untersuchung von Netzwerken (3.8) bedeutet das: Es werden die am weitesten rechts liegenden Eigenwerte der charakteristischen Gleichung (8.6) für feste Werte (a, b) und $(\bar{\tau}_0, \delta^*)$ numerisch berechnet. Liegen diese Eigenwerte in der linken Halbebene, ist das betrachtete System stabil. Mit dieser Vorgehensweise lassen sich nur einzelne Parameterpaarungen $(a, b), (\bar{\tau}_0, \delta^*)$ untersuchen und man erhält keine parameterabhängigen Stabilitätsaussagen. In [Michiels u. a. 2005] wurden parameterabhängige Aussagen lediglich für das System $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau(t))$, $x \in \mathbb{R}$ geliefert. Diese Resultate wurden mit Hilfe der Methode der D-Subdivision [Kolmanovskii 1986] erhalten. Für die Untersuchung von Netzwerken ist diese Methode nicht geeignet, da die Parameter (a, b) in der charakteristischen Gleichung (8.6) *nicht* ausschließlich linear auftreten.

Durch die Erweiterung des Frequency-Sweeping-Tests (Kapitel 8.1.2) erhält man, wie im Fall konstanter Totzeiten (Kapitel 4.4), parameterabhängige Stabilitätsbedingungen. Für zeitvariable Totzeiten entspricht sowohl der totzeitunabhängig stabile, als auch der totzeitabhängig stabile Parameterbereich (a, b) jeweils dem Bereich, der für den Fall konstanter Totzeiten bestimmt wurde (Kapitel 4.4). Mit der Erweiterung des Frequency-Sweeping-Tests lassen sich außerdem – für festes δ^* – qualitative Aussagen über den Einfluss von a, b und C auf $\bar{\tau}_0$ machen (8.22). Für schiefssymmetrische Verknüpfungsmatrizen C mit rechteckförmig variierender Totzeit (8.17) wurde gezeigt, dass der Frequency-Sweeping-Test auch quantitative Aussagen liefert. Für festes δ^* wurde $\bar{\tau}_0$ berechnet (Abbildung 8.3). Der aus dem Frequency-Sweeping-Test theoretisch ermittelte Zusammenhang $\bar{\tau}_0 = \bar{\tau}_0(\delta^*)$ wurde durch Simulationen bestätigt (Kapitel 8.1.4).

Wie die Ergebnisse für die schiefssymmetrische Verknüpfungsmatrix C zeigen, kann der Einsatz varianter Totzeiten (8.1) zu einer Vergrößerung des Stabilitätsbereiches $[0, \bar{\tau})$ führen, d.h. für $\delta \neq 0$ ist $\bar{\tau}_0 > \bar{\tau}$. Das Variieren der Totzeit kann also eingesetzt werden, um ein instabiles System zu stabilisieren. Die Totzeit ist in diesem Fall *keine* Störung oder Unsicherheit, sondern wird gezielt eingesetzt, um das Systemverhalten zu

verbessern.

Für Netzwerke ist besonders folgender Aspekt interessant. In der Realität ist es in einem Netzwerk nicht möglich die Totzeiten so gezielt zu beeinflussen, dass beispielsweise $\tau(t) = \tau_0 + \cos(\Omega t)$. Allerdings können die auftretenden Totzeiten als zufallsverteilt angenommen werden. In einem nächsten Schritt kann untersucht werden, ob sich die Aussagen in [Michiels u. a. 2005] auch auf stochastische Totzeiten mit Wahrscheinlichkeitsverteilung w erweitern lassen (Bemerkung 8.2).

8.2 Andere Ansätze

Im Gegensatz zu Kapitel 8.1 gehen die anderen Ansätze im Frequenzbereich davon aus, dass die Funktion $\tau = \tau(t)$ nicht bekannt ist. Die Zeitvarianz wird als Störung bzw. Unsicherheit betrachtet.

Im Wesentlichen gibt es zwei verschiedene Ansätze. In [Gu u. a. 2003] und [Fridman und Shaked 2005] werden Stabilitätskriterien mit Hilfe des *Small-Gain-Theorems* hergeleitet. Es ergeben sich hinreichende Bedingungen. Für die Untersuchung auf Stabilität muss die H_∞ -Norm einer Matrix $G(s)$ bestimmt werden. Für die Totzeit $\tau(t)$ wird

$$\tau_{min} \leq \tau(t) \leq \tau_{max} \quad \text{und} \quad \tau(t) \text{ stückweise stetig}$$

angenommen. Zusätzlich wird in [Gu u. a. 2003] vorausgesetzt, dass $\dot{\tau}(t) \leq \kappa < 1$, $\kappa \geq 0$. Diese Bedingung ist eine starke Einschränkung für $\tau(t)$. Der Ansatz von [Fridman und Shaked 2005] macht keine zusätzlichen Annahmen über die Änderung von $\tau(t)$. Allerdings muss das System für τ_{min} stabil sein.

Eine andere Möglichkeit ist, wie in [Fridman und Gil 2005], die *Laplace-Transformation* direkt auf ein Vergleichssystem anzuwenden. Durch Abschätzungen mit Hilfe der L_2 -Norm erhält man hinreichende Stabilitätskriterien, die wiederum auf der Berechnung der H_∞ -Norm beruhen. Für Totzeit $\tau(t)$ gelten die gleichen Annahmen wie in [Fridman und Shaked 2005].

In beiden Fällen muss die H_∞ -Norm numerisch berechnet werden. Aus diesem Grund sind für Netzwerke (Gleichung 3.8) keine allgemeinen Aussagen in Abhängigkeit der Parameter (a, b) möglich.

Kapitel 9

Stabilität von Systemen mit varianter Totzeit im Zeitbereich

Um Netzwerke mit varianten Totzeiten im Zeitbereich auf Stabilität zu untersuchen gibt es mehrere Ansätze. Diese werden im Folgenden kurz vorgestellt.

Wie im Fall konstanter Totzeiten (Kapitel 5) können aus dem *Theorem von Ljapunow-Krasovskii* bzw. aus dem *Theorem von Razumikhin* Stabilitätskriterien in Form von LMIs hergeleitet werden. Diese *hinreichenden* Bedingungen sind abhängig von der gewählten Modell-Transformation (vergleiche Kapitel 5.3) unterschiedlich konservativ. Für $\tau(t)$ gilt

$$\tau_{min} \leq \tau(t) \leq \tau_{max}.$$

Dabei nehmen einige Stabilitätskriterien an, dass $\tau_{min} = 0$ ist. Außerdem gelten manche Kriterien nur für den Fall $\dot{\tau}(t) \leq \kappa < 1$. In [Fridman und Shaked 2003], [Wu u. a. 2004] und [Xu u. a. 2006] werden die Ergebnisse, die sich aus den verschiedenen Stabilitätskriterien ergeben, gegenübergestellt. Netzwerke (Gleichung 3.8) können mit den aus dem Theorem von Ljapunow-Krasovskii bzw. aus dem Theorem von Razumikhin hergeleiteten Kriterien nur numerisch auf Stabilität untersucht werden. Parameterabhängige Aussagen wie beispielsweise in Kapitel 4.4.2 sind daher nicht möglich.

Im Gegensatz dazu liefern die Kriterien, die die Stabilität eines Systems über die Berechnung von *Matrix-Normen* bestimmen, allgemeine, parameterabhängige Aussagen. Die am wenigsten konservativen Ergebnisse sind dabei in [Goubet-Bartholomeus u. a. 1997] zu finden.

Bemerkung 9.1.

Die Theoreme für variante Totzeiten im Zeitbereich enthalten alle den Fall $\tau(t) = const$.

Kapitel 10

Ergebnisse und Ausblick

10.1 Zusammenfassung der Resultate

In dieser Arbeit wurde die Stabilität von digital vernetzten dynamischen Systemen untersucht. Ein wesentliches Merkmal dieser vernetzten Systeme ist, dass bei der Datenübertragung von einem Teilsystem zu einem anderen Zeitverzögerungen auftreten. Unter der Annahme, dass das vernetzte System ohne Zeitverzögerungen stabil ist, wurde die Frage beantwortet: Wie groß darf die Verzögerung in der Datenübertragung sein, so dass das vernetzte System trotzdem noch stabil ist?

Zunächst wurde ein einfaches Modell für digital vernetzte dynamische Systeme hergeleitet. Die Modellierung des Netzwerks ist ein wichtiger Schritt in der Stabilitätsuntersuchung. Aufgrund des gewählten Modells konnten Stabilitätsaussagen für beliebig große Netzwerke gemacht werden. Außerdem konnte mit Hilfe dieses Modells der Einfluss der Verknüpfungsstruktur auf die Stabilität des Systems untersucht werden. Abhängig davon, wie die einzelnen Teilsysteme miteinander verbunden sind, kann das Gesamt-System für eine bestimmte Zeitverzögerung stabil oder instabil sein. Dieser Zusammenhang zwischen Verknüpfungsstruktur und Stabilität wurde so bisher noch nicht betrachtet.

Die Stabilität des vernetzten Systems wurde sowohl im Frequenzbereich, als auch im Zeitbereich untersucht. In beiden Fällen existieren

unterschiedliche Kriterien, um die Stabilität zu analysieren. Diese verschiedenen Methoden wurden auf das Netzwerk-Modell angewendet und miteinander verglichen.

In einem ersten Schritt wurde angenommen, dass die Zeitverzögerung konstant ist. Die Stabilitätsanalyse im Frequenzbereich liefert notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingungen in Form von Ungleichungen, die nur von den System-Parametern und der Verknüpfungsstruktur abhängig sind. Damit sind allgemeine Aussagen für beliebig große Netzwerke möglich. Interessant ist hier, dass die Verknüpfungsstruktur direkt in die Ungleichungen eingeht. Diese Resultate erlauben Aussagen darüber, wie die Teilsysteme miteinander verknüpft werden müssen, damit das Gesamt-System trotz größerer Zeitverzögerungen stabil bleibt. Die Stabilitätskriterien im Zeitbereich sind lediglich hinreichende Bedingungen. Hier müssen lineare Matrixungleichungen (LMIs) ausgewertet werden. Dies ist nur numerisch möglich. Somit erhält man in diesem Fall keine parameterabhängigen Stabilitätsbedingungen für das Netzwerk.

Für zeitvariante Verzögerungen wurde ein Überblick über verschiedenen Ansätze zur Stabilitätsuntersuchung im Zeitbereich und im Frequenzbereich geliefert. Ausführlich dargestellt wurde eine neue Methode, die periodisch schnell variierende Zeitverzögerungen betrachtet. Um in diesem Fall parameterabhängige Aussagen für das Netzwerk zu erhalten, wurde ein Ansatz zur Stabilitätsuntersuchung von Systemen mit konstanter Zeitverzögerung auf Systeme mit varianter Zeitverzögerung erweitert. Durch die schnelle periodische Variation der Zeitverzögerung um einen festen Wert kann erreicht werden, dass ein instabiles System stabilisiert wird.

Die Ergebnisse, die sich mit Hilfe der verschiedenen Stabilitätskriterien ergeben, wurden jeweils für eine Auswahl von Beispielverknüpfungen berechnet und dargestellt. Simulationen bestätigen die berechneten Resultate.

Ziel der Arbeit war es, auf der einen Seite zu untersuchen, welche Vor- und Nachteile die unterschiedlichen Stabilitätsanalyse-Methoden haben und welche am besten für dynamisch vernetzte Systeme geeignet sind. Auf der anderen Seite war das Stabilitätsverhalten des betrachteten Netzwerk-Modells von Interesse.

10.2 Ausblick

Das Netzwerk-Modell, das in dieser Arbeit betrachtet wird, geht davon aus, dass die Zeitverzögerung auf allen Verbindungen zwischen den Teilsystemen gleich ist. Außerdem wird vorausgesetzt, dass ausschließlich Systeme miteinander verknüpft sind, die die gleiche Dynamik aufweisen. Dabei wird angenommen, dass sich die einzelnen Teilsysteme durch eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben lassen.

Aufbauend auf den Ergebnissen dieser Arbeit für das einfache Netzwerk-Modell ist es jetzt interessant, das betrachtete Modell zu verallgemeinern. Dabei könnten vernetzte Systeme untersucht werden, die aus unterschiedlichen Teilsystemen aufgebaut sind. Die Vereinfachung für die Dynamik der Teilsysteme kann aufgehoben werden und auch lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung oder sogar nichtlineare Differentialgleichungen zur Beschreibung der Dynamik verwendet werden. Außerdem wird in der Realität die Zeitverzögerung zwischen unterschiedlichen Teilsystemen nicht gleich groß sein. Desweiteren kann man davon ausgehen, dass die Verzögerung weder exakt konstant ist, noch periodisch variiert. Aus diesem Grund muss überlegt werden, wie diese Zeitverzögerungen besser modelliert werden können. Eine Möglichkeit ist sicherlich, stochastische Totzeiten anzunehmen. Für diesen Fall kann untersucht werden, ob sich die Stabilitätskriterien für schnell variiierende periodische Totzeiten auf stochastische Totzeiten erweitern lassen.

Aufgrund der Tatsache, dass der Zusammenhang zwischen Verknüpfungsstruktur und Stabilität so bisher noch nicht betrachtet wurde, lassen sich noch zahlreiche Themen finden, die bei der Beschäftigung mit vernetzten Systemen von Interesse sind. Beispielsweise könnte auch die Robustheit der Stabilität des Netzwerks analysiert werden.

Anhang A

Eigenwerte von Verknüpfungsmatrizen

A.1 Symmetrische Matrizen

Lemma A.1.

Eine reelle, symmetrische Matrix $M = M^T$ hat nur reelle Eigenwerte $\lambda(M) \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Sei $\lambda(M)$ ein Eigenwert der Matrix M und $v \neq 0$ der zugehörige Eigenvektor, dann gilt gemäß den Eigenschaften des komplexen Skalarprodukts [Höllig u. a. 2006]

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Mv, v \rangle = \langle v, M^T v \rangle.$$

Da $M = M^T$, ist

$$\langle v, M^T v \rangle = \langle v, Mv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle.$$

Daraus folgt

$$\lambda = \bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Lemma A.2.

Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = n - 1, \quad \lambda_{2, \dots, n} = -1.$$

Beweis:

Die Eigenwerte erhält man aus der charakteristischen Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Die Determinante ist genau dann null, wenn die Zeilen (oder Spalten) linear abhängig sind.

Wählt man $\lambda = -1$, so ist dies offensichtlich erfüllt. Der Eigenraum zu $\lambda = -1$ ist $(n - 1)$ -dimensional, d.h. der Eigenwert $\lambda = -1$ ist ein $(n - 1)$ -facher Eigenwert. Wählt man $\lambda_n = n - 1$ und addiert alle Spalten, so erhält man den Nullvektor, d.h. die Spalten sind für λ_n ebenfalls linear abhängig und λ_n ist der n -te Eigenwert der Matrix M . \square

Lemma A.3.

Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{A.1})$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{n-1}, \quad \lambda_{3,\dots,n} = 0.$$

Beweis:

Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion. Bewiesen werden soll, dass das charakteristische Polynom der $n \times n$ -Matrix (A.1)

$$c_n = (-1)^n \lambda^{n-2} (\lambda^2 - (n-1)) = 0 \tag{A.2}$$

ist.

- Induktionsanfang:
Für $n=2$ berechnen sich die Eigenwerte zu

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 & \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow (-1)^2 \lambda^0 (\lambda^2 - (2-1)) = 0. \end{aligned}$$

- Induktionsvoraussetzung:
Die Gleichung A.2 ist für ein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.
- Induktionsbehauptung:
Die Gleichung A.2 sei für $n+1$ erfüllt.
- Induktionsbeweis:
Das charakteristische Polynom

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}} = 0$$

der $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix wird durch Entwickeln nach der letzten Spalte berechnet

$$c_{n+1} = -\lambda c_n + (-1)^n \lambda^{n-1}.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich

$$c_{n+1} = (-1)^{n+1} \lambda^{n-1} (\lambda^2 - n).$$

Die Induktionsbehauptung ist erfüllt. □

Lemma A.4.

Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm 1, \quad \lambda_{3,\dots,n} = 0.$$

Beweis:

Die Eigenwerte erhält man aus der charakteristischen Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Die Determinante ist genau dann null, wenn die Zeilen (oder Spalten) linear abhängig sind.

Wählt man $\lambda_1 = 1$ und addiert alle Spalten, so erhält man den Nullvektor, d.h. die Spalten sind für λ_1 linear abhängig und die Determinante ist null. Wählt man $\lambda_2 = -1$ und zieht von der ersten Spalte alle anderen ab, dann erhält man wiederum den Nullvektor. Für $\lambda = 0$ sind die letzten $n-1$ Zeilen gleich und daraus folgt, dass die Determinante ebenfalls null ist. Der Eigenraum zu $\lambda = 0$ ist $(n-2)$ -dimensional. □

A.2 Schiefsymmetrische Matrizen

Lemma A.5.

Eine reelle, schiefsymmetrische Matrix $M = -M^T$ hat nur imaginäre Eigenwerte $\lambda(M) \in \mathbb{C}$.

Beweis:

Sei $\lambda(M)$ ein Eigenwert der Matrix M und $v \neq 0$ der zugehörige Eigenvektor, dann gilt gemäß den Eigenschaften des komplexen Skalarprodukts [Höllig u. a. 2006]

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Mv, v \rangle = \langle v, M^T v \rangle.$$

Da $M = -M^T$, ist

$$\langle v, M^T v \rangle = \langle v, -Mv \rangle = \langle v, -\lambda v \rangle = -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle.$$

Daraus folgt

$$\lambda = -\bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \partial\mathbb{C}_-. \quad \square$$

Lemma A.6.

Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{A.3})$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{n-1}, \quad \lambda_{3,\dots,n} = 0.$$

Beweis:

Der Beweis lässt sich analog zu dem Beweis für Lemma A.3 führen. Das charakteristische Polynom lautet hier

$$c_n = (-1)^n \lambda^{n-2} (\lambda^2 + (n-1)) = 0$$

und für c_{n+1} ergibt sich

$$c_{n+1} = -\lambda c_n - (-1)^n \lambda^{n-1}. \quad \square$$

Lemma A.7.

Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm j, \quad \lambda_{3,\dots,n} = 0.$$

Beweis:

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ -1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Wählt man $\lambda_1 = j$, multipliziert die erste Spalte mit $-j$ und addiert alle Spalten, so erhält man den Nullvektor, d.h. die Spalten sind für λ_1 linear abhängig und die Determinante ist null. Wählt man $\lambda_2 = -j$, multipliziert die erste Spalte mit j und addiert alle Spalten, dann erhält man wiederum den Nullvektor. Für $\lambda = 0$ sind die letzten $n-1$ Zeilen gleich und daraus folgt, dass die Determinante ebenfalls null ist. Der Eigenraum zu $\lambda = 0$ ist $(n-2)$ -dimensional. \square

A.3 Die Kreis-Struktur

Lemma A.8.

Das charakteristische Polynom der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{A.4})$$

ist

$$\lambda^n = 1.$$

Beweis:

Wird

$$c_n = \det \underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} = 0$$

nach der letzten Spalte entwickelt, so hat die Unterdeterminante zu $-\lambda$ Dreiecksform. Die Determinante einer Matrix D in Dreiecksform ist

$$\det(D) = \prod_{i=1}^n d_{ii} \quad (\text{Produkt der Diagonalelemente}).$$

mit $i \in \{1, \dots, n\}$. Die Unterdeterminante zu 1 ist $(-1)^{n-2}$. Damit ist

$$c_n = (-1)(-1)^{n-2} + (-\lambda)(-\lambda)^{n-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^n = 1. \quad \square$$

Anhang B

Herleitung von $\bar{\tau}$

B.1 Das allgemeine $n \times n$ -System

Die Gleichung (4.38) wird ausgehend von

$$\begin{aligned} \arg \left[\frac{b}{j\omega_k - a} \right] + \arg[\lambda_k(C)] &= \tau_k \omega_k \\ \underbrace{\arg[-ab - j\omega_k b] + \arg[\lambda_k(C)]}_{\in [0, 2\pi]} &= \tau_k \omega_k, \quad \omega_k > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

hergeleitet. Für die Rechnung sind die beiden Eigenschaften

$$a + b \operatorname{Re}[\lambda_k(C)] < 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{B.2})$$

und

$$\exists \lambda_k(C) = u + jv \Leftrightarrow \exists \lambda_k(C) = u - jv \quad \text{mit } u, v \in \mathbb{R}, v \neq 0 \quad (\text{B.3})$$

wichtig. Außerdem werden die Identitäten [Bronstein u. a. 2000]

$$\arctan(x) = \begin{cases} -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) & \text{für } x \leq 0 \\ \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

und

$$\begin{aligned} &\arccos(x) + \arccos(y) \\ &= \begin{cases} \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & \text{für } x+y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & \text{für } x+y < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

für Umformungen verwendet. Um die Notation zu vereinfachen wird $\lambda_k(C)$ im Folgenden mit λ bezeichnet, ω_k mit ω und τ_k mit τ .

Für die Winkel in (B.1) ist eine *Fallunterscheidung* notwendig. Für $\arg[-ab - j\omega b]$ ergeben sich die Fälle:

Fall	Parameter	$\arg[-ab - j\omega_k b]$
1	$a < 0, b < 0$	$\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) + \pi$
2	$a < 0, b > 0$	$\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$
3	$a > 0, b < 0$	$\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$
4	$a > 0, b > 0$	$\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) + \pi$

Tabelle B.1: Erste Fallunterscheidung bei der Berechnung von $\bar{\tau}$

Ist $b = 0$, dann ist der Winkel null. Dieser Fall ist allerdings nicht interessant, da für $b = 0$ kein Netzwerk mehr vorliegt. Die Teilsysteme sind nicht miteinander verknüpft. Ergebnisse für $a = 0$ erhält man aus den obigen Fällen, wenn der Grenzwert gebildet wird.

Für $\arg[\lambda]$ muss unterschieden werden:

Fall	Parameter	$\arg[\lambda]$
A	$\operatorname{Re}(\lambda) < 0, \operatorname{Im}(\lambda) \leq 0$	$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{\operatorname{Re}(\lambda)}\right) + \pi$
B	$\operatorname{Re}(\lambda) < 0, \operatorname{Im}(\lambda) > 0$	$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{\operatorname{Re}(\lambda)}\right) + \pi$
C	$\operatorname{Re}(\lambda) > 0, \operatorname{Im}(\lambda) \leq 0$	$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{\operatorname{Re}(\lambda)}\right)$
D	$\operatorname{Re}(\lambda) > 0, \operatorname{Im}(\lambda) > 0$	$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\lambda)}{\operatorname{Re}(\lambda)}\right)$

Tabelle B.2: Zweite Fallunterscheidung bei der Berechnung von $\bar{\tau}$

Ergebnisse für $\text{Re}(\lambda) = 0$ erhält man aus den obigen Fällen, wenn der Grenzwert gebildet wird.

Beispielhaft wird die Kombination Fall 3/ Fall D betrachtet. Mit (4.37)

$$\omega^2 = b^2 \lambda^2 - a^2 \quad (\text{B.6})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \tau \omega &= \underbrace{\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)}_{>0} + \underbrace{\arctan\left(\frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)}\right)}_{>0} \\ (\text{B.4}) \quad &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}}\right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)}\right)^2}}\right) \\ (\text{B.6}) \quad &= \arccos\left(\frac{-a}{b|\lambda|}\right) + \arccos\left(\frac{\text{Re}(\lambda)}{|\lambda|}\right) \\ (\text{B.5}) \quad &= \arccos\left(\frac{\text{Re}(\lambda)a}{-b|\lambda|^2} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2|\lambda|^2}} \sqrt{1 - \frac{\text{Re}^2(\lambda)}{|\lambda|^2}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\omega \text{Im}(\lambda) - a \text{Re}(\lambda)}{b|\lambda|^2}\right) \end{aligned}$$

Die Berechnung von τ für die anderen Kombinationen ist analog. Einige Fälle können aufgrund der Eigenschaften a), b) ausgeschlossen werden. Zum Beispiel muss $\text{Re}(\lambda) > 0$ gelten, wenn der Fall 3 betrachtet wird. Alle Kombinationen führen zum gleichen Ergebnis. Eine Minimierung über die berechneten $\tau = \tau_k$ ergibt dann $\bar{\tau}$.

B.2 Symmetrische Matrizen

Die Stabilitätsbereiche in Abbildung 4.5 für Fall 1 und Fall 2 zeigen, dass nur die Kombinationen

$$a < 0, b < 0, \lambda_r > 0 \quad \text{und} \quad a < 0, b > 0, \lambda_r < 0$$

aufzutreten. Mit λ_r werden die zur Berechnung von $\bar{\tau}$ relevanten Eigenwerte bezeichnet. Im totzeitabhängig stabilen Parameterbereich gilt für diese Eigenwerte $b^2 \lambda_r^2 - a^2 > 0$ (Satz 4.2).

Die allgemeine Bestimmungsformel für $\bar{\tau}$ (4.39) vereinfacht sich, da $\text{Im}(\lambda) = 0$. Aus der Gleichung

$$\bar{\tau} = \min_r \{\tau_r\} = \min_r \left\{ \frac{1}{\sqrt{b^2 \lambda_r^2 - a^2}} \arccos\left(\frac{-a}{b \lambda_r}\right) \right\}$$

sieht man, dass τ_r abnimmt, wenn ein betragsmäßig größerer Eigenwert eingesetzt wird. Sowohl der Arkuskosinus $\arccos\left(\frac{-a}{b \lambda_r}\right)$, als auch der Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{b^2 \lambda_r^2 - a^2}}$ sind monoton fallend mit steigendem $|\lambda_r|$.

B.3 Schiefsymmetrische Matrizen

Für schiefsymmetrische Matrizen vereinfacht sich die allgemeine Formel (4.39) aufgrund der Eigenschaft $\text{Re}(\lambda) = 0$ zu

$$\bar{\tau} = \min_k \left\{ \frac{1}{\sqrt{b^2 |\lambda_k|^2 - a^2}} \arccos\left(\frac{\sqrt{b^2 |\lambda_k|^2 - a^2}}{b \text{Im}(\lambda_k)}\right) \right\}.$$

Um den kleinsten Wert für $\bar{\tau}$ zu finden, wird $b \text{Im}(\lambda_k) > 0$ gewählt. Da bei reellen Matrizen nur konjugiert komplexe Eigenwertpaare auftreten, kann λ_k immer so gewählt werden, dass dies erfüllt ist.

Mit der Identität [Bronstein u. a. 2000]

$$\arccos(x) = \frac{1}{2} \arccos(2x^2 - 1), \quad 0 \leq x \leq 1$$

erhält man

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \min_k \left\{ \frac{1}{2\sqrt{b^2|\lambda_k|^2 - a^2}} \arccos \left(1 - \frac{2a^2}{b^2|\lambda_k|^2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{b^2\rho^2 - a^2}} \arccos \left(1 - \frac{2a^2}{b^2\rho^2} \right).\end{aligned}$$

B.4 Die Kreis-Struktur

Im totzeitabhängig stabilen Bereich ist

$$a < 0, \quad b < a, \quad \text{und } b > \frac{-a}{\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)} = \frac{a}{\rho_{\text{Re}}} \quad (\text{B.7})$$

mit $\rho_{\text{Re}} = \max_{k=1, \dots, n} \{|\text{Re}(\lambda)|\}$.

Aus der allgemeinen Gleichung (4.39) ergibt sich mit $\text{Im}(\lambda) = -\sqrt{1 - \text{Re}^2(\lambda)}$ und $|\lambda| = 1$

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \min_k \{\tau_k\} \\ &= \min_k \left\{ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arccos \left(\frac{-\sqrt{b^2 - a^2} \sqrt{1 - \text{Re}^2(\lambda_k)} - a \text{Re}(\lambda_k)}{b} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Die reelle Matrix C hat nur konjugiert komplexe Eigenwertpaare. Wird der Eigenwert mit negativem Imaginärteil gewählt, erhält man einen kleineren Wert für τ_k . Für den kleinsten Wert τ_k ist das Argument η des Arkuskosinus maximal. Die Änderung des Arguments bezüglich $\text{Re}(\lambda)$

$$\frac{\partial \eta}{\partial (\text{Re}(\lambda))} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2} \text{Re}(\lambda)}{b \sqrt{1 - \text{Re}^2(\lambda)}} - \frac{a}{b}$$

ist für $\text{Re}(\lambda) > 0$ in dem betrachteten Parameterbereich (B.7) negativ und aufgrund von $b^2 \text{Re}^2(\lambda) > a^2$ für $\text{Re}(\lambda) < 0$ ebenfalls. Daraus folgt, dass für $\text{Re}(\lambda)$ der *kleinste* Wert gewählt werden muss. Das ist in diesem Fall $\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)$. Weitere Umformungen ergeben die Formel in Beispiel 11.

Anhang C

Beweis der Sätze zu varianten Totzeiten

C.1 Totzeitunabhängige Stabilität

Beweis:

Die Ungleichungen (i) und (ii) sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Stabilität von $\tau_0 \rightarrow \infty$ bzw. $\tau_0 = \delta = 0$ (Gleichungen 8.6, 8.8). Um zu zeigen, dass die Bedingungen (i), (ii) und (iii) notwendige und hinreichende Bedingungen für die totzeitunabhängige Stabilität des Systems (8.4) sind, werden die drei Fälle

- $\rho \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta) \right] < 1$
- $\rho \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta) \right] = 1$
- $\rho \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta) \right] > 1$

untersucht.

Aus der Annahme, dass A_0 stabil ist, folgt, dass $(j\omega - A_0)^{-1} A_1 \forall \omega \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist.

Angenommen Bedingung (iii) sei erfüllt, dann gilt

$$\left| \lambda_i \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta) \right] \right| < 1, \quad \forall \omega \neq 0$$

bzw.

$$\left| \lambda_i \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta) e^{-j\omega\tau_0} \right] \right| < 1, \quad \forall \omega \neq 0$$

mit beliebigem $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$. Aus

$$\begin{aligned} \det \left[I - (j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta) e^{-j\omega\tau_0} \right] \\ = \prod_{i=1}^n \left[1 - \lambda_i \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta) e^{-j\omega\tau_0} \right] \right] \neq 0 \quad (\text{C.1}) \end{aligned}$$

folgt

$$\det \left[j\omega I - A_0 - A_1 g(j\omega\delta) e^{-j\omega\tau_0} \right] \neq 0, \quad \forall \omega \neq 0.$$

Für $\omega = 0$, $g(0) = 1$ ist

$$\det [-A_0 - A_1] \neq 0$$

(Bedingung (ii)). Aus Bedingung (i) – (iii) folgt damit die totzeitunabhängige Stabilität von (8.4).

Die Notwendigkeit von Bedingung (iii) wird im Folgenden gezeigt. Unter der Annahme

$$\rho \left[(j\omega_0 I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega_0\delta) \right] = 1 \quad \text{für ein } \omega_0 \neq 0$$

hat die Matrix $(j\omega_0 I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega_0\delta)$ einen Eigenwert bei $e^{j\theta_0}$, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Mit $\tau_0 = \theta_0/\omega_0$ ist

$$\begin{aligned} \det \left[I - (j\omega_0 I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega_0\delta) e^{-j\theta_0} \right] &= 0 \quad \text{bzw.} \\ \det \left[j\omega_0 I - A_0 - A_1 g(j\omega_0\delta) e^{-j\omega_0\tau_0} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Das System ist instabil für $\tau = \tau_0$ und damit nicht totzeitunabhängig stabil.

Nimmt man an, dass

$$\rho \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta) \right] > 1 \quad \text{für einige } \omega_p > 0 \text{ bzw. } \omega_n < 0.$$

dann ergibt sich aus

- der Stetigkeit von $\rho \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta) \right]$ bezüglich ω und
- $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \left(\rho \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta) \right] \right) = 0$,

dass ein $\omega_{p,0} \in (\omega_p, \infty)$ bzw. ein $\omega_{n,0} \in (-\infty, \omega_n)$ existiert, für das $\rho(\cdot) = 1$. Das System ist nicht totzeitunabhängig stabil.

Damit ist bewiesen, dass die Bedingungen (i), (ii) und (iii) zusammen ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die totzeitunabhängige Stabilität des Systems (8.4) sind. \square

C.2 Totzeitabhängige Stabilität

Beweis:

Für $\tau_0 = 0$ und $\delta = 0$ ist das System stabil. Es wird angenommen, dass für beliebiges $\tau_0 \in [0, \bar{\tau}_0)$, $\bar{\tau}_0 < \infty$ die Gleichung

$$\det [j\omega I - A_0 - A_1 g(j\omega\delta^*) e^{-j\omega\tau_0}] \neq 0, \quad \forall \omega \neq 0 \quad (\text{C.2})$$

erfüllt ist.

Zunächst werden die Frequenzen $\omega \neq \omega_k^i$ betrachtet. Für diese Frequenzen ist

$$\left| \lambda_i \left[(j\omega I - A_0)^{-1} A_1 g(j\omega\delta^*) e^{-j\omega\tau_0} \right] \right| \neq 1.$$

Daraus folgt, dass Gleichung (C.2) für $\omega \neq \omega_k^i$ erfüllt ist.

Für $\omega = \omega_k^i$ ist für Werte $\tau_0 \in [0, \bar{\tau}_0)$ die Gleichung $\tau_0 \omega_k^i = \theta_k^i$ nicht erfüllt. Dies folgt aus der Definition von $\bar{\tau}_0$ (8.11). Das System ist damit für $\tau_0 \in [0, \bar{\tau}_0)$ stabil.

Für $\tau_0 = \bar{\tau}_0$ existiert ein Paar (ω_k^i, θ_k^i) , so dass $\bar{\tau}_0 = \theta_k^i / \omega_k^i$ und

$$\det [j\omega_k^i I - A_0 - A_1 g(j\omega_k^i \delta^*) e^{-j\omega_k^i \bar{\tau}_0}] = 0.$$

Das System ist also für $\tau_0 = \bar{\tau}_0$ instabil. \square

Literaturverzeichnis

- [Bistriz 2005] BISTRITZ, Y.: On an inviable approach for derivation of 2-D stability tests. In: *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on [see also Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, IEEE Transactions on]* 52 (2005), Nr. 11, S. 713–718
- [Bronstein u. a. 2000] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G.: *Taschenbuch der Mathematik*. Deutsch (Harri), 2000. – ISBN 3817120052
- [Fridman und Gil 2005] FRIDMAN, E. ; GIL, M.: A direct frequency domain approach to stability of linear systems with time-varying delays. In: *Intelligent Control, 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on, Mediterrean Conference on Control and Automation*, 2005, S. 1544–1547
- [Fridman und Shaked 2003] FRIDMAN, E. ; SHAKED, U.: Delay-dependent stability and H_∞ control: constant and time-varying delays. In: *International Journal of Control* 76 (2003), Nr. 1, S. 48–60
- [Fridman und Shaked 2005] FRIDMAN, E. ; SHAKED, U.: Stability and L_2 -Gain Analysis of Systems with Time-Varying Delays: Input-Output Approach. In: *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*, 2005, S. 7175–7180
- [Gahinet u. a. 1995] GAHINET, P. ; NEMIROVSKI, A. ; LAUB, A. J. ; CHILALI, M.: *LMI Control Toolbox - For Use with MATLAB*. The MathWorks, Inc., 1995. – User's Guide
- [Goubet-Bartholomeus u. a. 1997] GOUBET-BARTHOLOMEUS, A. ; DAMBRINE, M. ; RICHARD, J. P.: Stability of perturbed systems with time-varying delays. In: *Systems and Control Letters* 31 (1997), Nr. 3, S. 155–163
- [Gu u. a. 2003] GU, K. ; KHARITONOV, V. L. ; CHEN, J.: *Stability of Time-Delay Systems (Control Engineering)*. Birkhäuser Boston, 2003. – ISBN 0817642129
- [Hale und Lunel 1993] HALE, Jack K. ; LUNEL, Sjoerd M. V.: *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, B., 1993. – ISBN 3540940766
- [Höllig u. a. 2006] HÖLLIG, K. ; KRATZ, W. ; KIMMERLE, W. *Mathematik Online*. URL <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/>. 2006
- [Kharitonov und Niculescu 2002] KHARITONOV, V. L. ; NICULESCU, S.-I.: On the stability of linear systems with uncertain delay. In: *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002 Bd. 3, 2002*, S. 2216–2220vol.3
- [Kühn 2002] KÜHN, P. J.: *Einführung in die Informatik I,II - Teil A: Grundlagen und Technische Informatik*. 2002. – Vorlesungsskript
- [Kolmanovskii 1986] KOLMANOVSKII, V. B.: *Stability of Functional Differential Equations (Mathematics in Science and Engineering, Vol 180)*. Academic Press, 1986. – ISBN 0124179401
- [Ludyk 1995] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik II*. Springer, Berlin, 1995. – ISBN 3 540 55041 0
- [Michiels u. a. 2005] MICHIELS, W. ; VAN ASSCHE, V. ; NICULESCU, S.-I.: Stabilization of time-delay systems with a Controlled time-varying delay and applications. In: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 50 (2005), Nr. 4, S. 493–504
- [Niculescu 2001] NICULESCU, S.-I.: *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. Springer, 2001. – ISBN 1852332913
- [Niculescu u. a. 1998] NICULESCU, S.-I. ; DE SOUZA, C.E. ; DUGARD, L. ; DION, J.-M.: Robust exponential stability of uncertain systems with

- time-varying delays. In: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 43 (1998), Nr. 5, S. 743–748
- [Olfati-Saber und Murray 2004] OLFATI-SABER, R. ; MURRAY, R. M.: Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. In: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 49 (2004), Nr. 9, S. 1520–1533
- [Olgac und Sipahi 2002] OLGAC, N. ; SIPAHI, R.: An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems. In: *Automatic Control, IEEE Transactions on* 47 (2002), Nr. 5, S. 793–797
- [Scherer und Weiland 2000] SCHERER, C. ; WEILAND, S.: *Linear Matrix Inequalities in Control*. 2000. – Lecture Notes
- [Shiotsuki und Nasu 2002] SHIOTSUKI, T. ; NASU, T.: A case study of tele-operation system with time-delay. In: *SICE 2002. Proceedings of the 41st SICE Annual Conference* Bd. 2, 2002, S. 1202–1205
- [Skogestad und Postlethwaite 2005] SKOGESTAD, S. ; POSTLETHWAITE, I.: *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Wiley and Sons Ltd, 2005. – ISBN 0470011688
- [Wehlan 2004] WEHLAN, H.: *Dynamik ereignisdiskreter Systeme*. Oktober 2004. – Vorlesungsskript
- [Wu u. a. 2004] WU, M. ; HE, Y. ; SHE, J.-H. ; LIU, G.-P.: Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems. In: *Automatica* 40 (2004), S. 1435–1439
- [Xu u. a. 2006] XU, S. ; LAM, J. ; ZOU, Y.: New results on delay-dependent robust H_∞ control for systems with time-varying delays. In: *Automatica* 42 (2006), Februar, S. 343–348